Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2019/20 учебный год

9 класс

Дорогой друг! Желаем успеха!

Инструкция для учащихся

Олимпиада по математике состоит из 6 заданий. На выполнение Олимпиады отводится 4 астрономических часа. Каждое задание оценивается в 7 баллов, решение задания необходимо расписать подробно. Задания можно выполнять по своему усмотрению. Если задание не удается выполнить сразу, перейдите к следующему. Если останется время, вернитесь к пропущенным заданиям.

Калькулятором, справочной литературой пользоваться нельзя!

Задания (максимальный балл за всю работу – 42)

1. Квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ составное.

2. Докажите, что при всех положительных x, y, z выполняется неравенство $x^2/y + y^2/z \geq 4(x - z)$.

3. Имеется неограниченное число фишек шести цветов. Какое наименьшее число фишек нужно расположить в ряд так, чтобы для любых двух различных цветов в ряду нашлись две соседние фишки этих цветов?

4. В плоскости расположены n одинаковых зубчатых колёс так, что первое сцеплено зубцами со вторым, второе – с третьим и так далее, наконец, последнее n-е колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колёса такой системы?

5. Точка D – середина стороны AC треугольника ABC, а отрезки DE и DF – биссектрисы треугольников ABD и CBD. Отрезки BD и EF пересекаются в точке M. Докажите, что $DM = EF/2$.

6. На столе лежит 2001 монета. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За ход первый может взять со стола любое нечётное число монет от 1 до 99, второй – любое чётное число монет от 2 до 100. Проигрывает

тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? Ответ обоснуйте.