Материалы для проведения муниципального этапа Российской олимпиады школьников по математике
в республике Башкортостан
1 декабря 2020 года

Составитель заданий: Р. Г. Женодаров

Рецензенты: к.ф.-м.н. Н. Ф. Валеев, к.ф.-м.н. К. П. Исаев,
к.ф.-м.н. В. И. Луценко

Общие указания по проверке решений олимпиадных заданий по математике.

Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	План решения верный и может стать полностью правильным после исправлений или дополнений
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Следует иметь в виду, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

При оценке решения задачи в первую очередь нужно исходить из общих критериев, но учитывать конкретные критерии по задачам.

Задачи, наброски решений, критерии по отдельным задачам.

10 класс

1. Решить систему $\begin{cases} \sqrt{2x^2+2} = y+1; \\ \sqrt{2y^2+2} = z+1; \\ \sqrt{2z^2+2} = x+1. \end{cases}$

Ответ: (1, 1, 1).

Набросок решения. Возведя каждое из уравнений в квадрат и сложив, перенесём все слагаемые левую часть и выделим полные квадраты. Получим $(x–1)^2+(y–1)^2+(z–1)^2=0$. Откуда $x=y=z=1$. Проверка показывает, что эта тройка подходит, так как левая и правая части равны 2.

Критерии. Получено, что тройка (1, 1, 1) – решение. Но не сделана проверка: 5 баллов.

Критерии: Ответ без обоснования: 1 балл.

2. В турнире по пляжному футболу участвуют 17 команд, причём каждая играет с каждой ровно один раз. За победу в основное время команде начисляют 3 очка. За победу в дополнительное время - 2 очка и за победу по пенальти - 1 очко. Проигравшая команда очков не получает. Какое наибольшее количество команд могут набрать ровно по 5 очков?

Ответ: 11.

Набросок решения. Оценка. Пусть n команд набрали ровно по 5 очков. В сумму очков входят все очки, набранные этими командами в играх между собой (минимум 1) и, возможно, в играх с другими командами: $5n\geq(n–1)n/2$. Откуда $n\leq11$.

Пример: поставим одиннадцать команд в круг, и пусть каждая выиграла у пяти следующих за ней по ходу часовой стрелки по пенальти. Остальные команды у них выиграли.

Критерии. Пример без оценки: 2 балла. Оценка без примера: 4 балла.

3. Найти все функции, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых x, y выполняется равенство $f(x+|y|)=f(|x|)+f(y)$.

Ответ: $f(x)=0$ для всех действительных x.

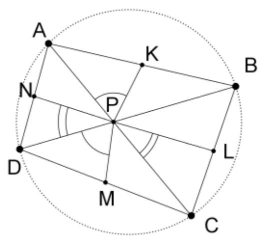
Набросок решения. Положим $x=0$, $y=0$, получим $f(0)=f(0)+f(0)$ и значит, $f(0)=0$. Если $y=0$, то $f(x)=f(|x|)$. Положим $x=–|y|$, $0=f(0)=f(|–|y||)+ f(y) = f(y)+f(y)=2f(y)$. Значит $f(y)=0$.

4. Пусть a и b – положительные числа такие, что $a\geq4b$. Доказать, что $a^2+b^2\geq4ab$.

Набросок решения. $a^2+b^2=3a^2/4+a^2/4+b^2\geq3a4b/4+ab=4ab$.

Второй способ. Разделим доказываемое неравенство на $b^2>0$. И введём новую переменную $x=a/b\geq4$. $x^2+1\geq4x \Leftrightarrow (x–2)^2–3\geq0$. При $x\geq2$ функция $f(x)=(x–2)^2–3$ возрастает и, значит, из $x\geq4\geq2$. $f(x)\geq f(4)=1>0$.

5. Диагонали вписанного четырёхугольника ABCD пересекаются в точке P. Пусть K, L, M, N середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что сумма углов KPL и NPM равна 180 градусам.



Набросок решения. Пусть K, L, M, N середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Треугольники BAP и CDP подобны по двум углам. Из этого следует, что подобны треугольники KAP и MDP (по углу и пропорциональности соответственных сторон). Значит, ∠APK=∠DPM. Аналогично доказывается ∠CPL=∠DPN. Используя эти равенства, имеем ∠KPL+∠NPM=∠KPL+∠NPD+∠DPM=∠KPL +∠APK +∠CPL=180°.

Критерии. Доказано подобие треугольников KAP и MDP: 2 балла.

6. Вася задумал натуральное число $n \leq 2020$. Петя пытается угадать его следующим образом: он называет некоторое натуральное число x и спрашивает, больше ли его задуманное число (верно ли, что $x<n$?), а Вася отвечает ему «да» или «нет». Петя выигрывает, если он узнает число, и проигрывает, если после получения ответа «нет» во второй раз он не может назвать задуманное число. Какого наименьшего числа вопросов достаточно Пете, чтобы он победил?

Ответ: 64.

Решение. Сначала заметим, что если Петя получит первый ответ «нет» в какой-то момент, это означает, что тогда он знает, что число n находится в некотором промежутке $[n_1, n_2]$. Если его следующая попытка-число $x > n_1$, и получен ответ «нет» - он проигрывает, потому что он не имеет права задавать больше вопросы, а он знает, что задумал Вася одно из чисел $n_1, n_1 + 1, \ldots, x$. Поэтому Петя должен последовательно спрашивать про числа $n_1, n_1 + 1, \ldots, n_2–1$, и это $n_2 - n_1$ вопросов.:

Теперь мы покажем, что Петя всегда может угадать число за 64 вопроса, спросив Васю про числа: $64, 64 + 63, 64 + 63 + 62, \ldots, 64 + 63 + \cdots +13 = 2008$, пока он не получит ответ «нет» Если этого никогда не случится, то есть, всегда ответ Васи «да», это после 52-го вопроса, когда он устанавливает число Васи [2009, 2020] и за 11 вопросов угадает число.

Если он получит ответ ”нет " после вопроса с числом $63 + 62 + \cdots + k$, то задуманное число в промежутке $[64 + 63 + \cdots + (k + 1) + 1, 64 + 63 + \cdots + (k + 1) + k]$ и из сказанного выше следует, что ему нужно всего не более $(64\text{-}k + 1) + k - 1 = 64$ вопросов.

Предположим, что у Пети есть стратегия нахождения задуманного числа не более, чем за 63 вопроса. Если на первом вопросе он получит ответ «нет», это означает, что Вася задумал число, которое не превышает 63. Если Петя получил ответ «да», и во втором вопросе он получит ответ «нет», то второе число не может превышать $63 + 62 = 125$. Продолжая те же рассуждения, мы заключаем, что число после 63-го вопроса не превосходит $63 + 62 + \cdots + 1 = 2016 < 2020$, и при ответе «да» на этот вопрос Петя не сможет определить число Васи, противоречие.

Критерии: Доказано, что 63 вопросов не хватит: 3 балла.

Показано , как найти задуманное число за 64 вопроса: 4 балла.