10 **класс**

Задача 10.1 (7 баллов)

Десятичная запись числа К состоит из 2019 единиц и 2020 нулей, записанных в каком-то порядке. Может ли число К быть точным квадратом?
(слова «десятичная запись», означают что число записано в нашей обычной десятичной системе счисления, а не в двоичной или какой-нибудь ещё)

Решение:

Сумма цифр числа 12, значит К $\approx$ 3. Если К = $n^2 \approx 3$, значит $n \approx 3$, тогда $n = 3m$, $n^2 = 9m^2$, а значит К $\approx$ 9. Но это не так, значит К не может быть квадратом.

Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Показано, что К $\approx$ 3	3
Ответ без обоснования	0

Ответ: не может

Задача 10.2 (7 баллов)

Вася, Петя и еще 2020 человек встали в круг, при этом Вася и Петя находятся не рядом. После этого Вася выбирает любого из двух своих соседей и «пятнает» его (хлопает по плечу). Потом это делает Петя, потом снова Вася и т.д. Тот, кого запятнали, выходит из круга (и круг сужается). Тот из двух игроков, который запятнает другого, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

Решение:

Никто из игроков не хочет создавать промежуток между ними длиной в 0, иначе он тут же проиграет. Значит, в некоторый момент оба промежутка станут содержать по одному человеку, к этому моменту будет сделано 2020–2=2018 ходов (последний ход был за вторым – Петей). Значит, Вася вынужден сделать промежуток длины 0 и Петя его тут же «запятнает».

Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Ответ без обоснования или неверный ответ	0

Ответ: Выиграет второй игрок – Петя

Задача 10.3 (7 баллов)

В противоположных углах клетчатой таблицы 2020×2021 сидят два кузнечика. За каждый ход они одновременно перепрыгивают через сторону на соседнюю клетку. Смогут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в одной клетке?

Решение:

Раскрасим клетки таблицы в шахматном порядке так. Кузнечики окажутся в клетках разного цвета. После каждого хода кузнечики одновременно меняют цвет, и снова оказываются в клетках разного цвета. Значит, они никогда не смогут оказаться в одной клетке.

Замечание. Можно так же рассматривать сумму координат клетки, на который сидит кузнечик. Они окажутся у кузнечиков разной чётности.

Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Идея раскраски или суммы координат, с неверным выводом	2

Ответ без обоснования	0

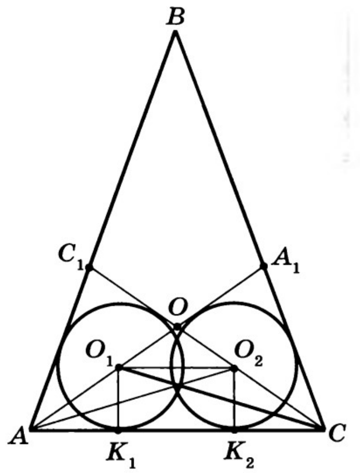
Ответ: не смогут

Задача 10.4 (7 баллов)

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 Радиусы окружностей, вписанных в треугольники AA_1C и CC_1A, равны.Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

Решение:

Доказательство.



Если O_1 и O_2 соответственно центры окружностей, вписанных в треугольники CC_1A и AA_1C, K_1 и K_2 — точки касания этими окружностями стороны AC, то $O_1 \in AA_1$, $O_2 \in CC_1$ и $O_1K_1 = O_2K_2 = r$. Отсюда следует, что четырехугольник AO_1O_2C — трапеция. Но AO_2 — биссектриса угла A_1AC, CO_1 — биссектриса угла C_1CA, поэтому $\angle O_1AO_2 = \angle O_2AC = \angle AO_2O_1$, т. е. $AO_1 = O_1O_2$.

Аналогично $CO_2 = O_1O_2$. Трапеция AO_1O_2C — равнобедренная, значит, $\angle O_1AC = \angle O_2CA$, откуда и следует утверждение задачи, так как $\angle BAC = 2\angle O_1AC$, $\angle BCA = 2\angle O_2CA$.

Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Доказано, что $AO_1 = O_1O_2$	4
Доказано, что AO_1O_2C — трапеция	2

Задача 10.5 (7 баллов)

Пусть$A=a_1x^2+b_1x+c_1$и$B=a_2x^2+b_2x+c_2$ –квадратные трёхчлены, имеющие корни. Известно, что A-B – корней не имеет. Докажите, что A+B имеет корни.

Решение:

Предположим противное: C=A+B и P=A-B оба не имеют корней. Есть два варианта: C и P одного знака или они разных знаков (если у многочленанет корней, то он принимает значения одного знака). В первом случае их сумма также постоянного знака, но C+P=2A имеет корни— противоречие. Во втором случае их разность должна иметь постоянный знак, но C-P=2B тоже имеет корни — противоречие.

Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Верно записаны дискриминанты суммы и разности трёхчленов, без дальнейшего продвижения	3