Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2020-2021 уч.год

10 класс

1. 50 учениц с пятого по девятый класс опубликовали в Инстаграмме суммарно 60 фотографий, каждая не меньше одной. Все ученицы одного класса (одной параллели) опубликовали равное число фотографий, а ученицы разных классов (разных параллелей) – разное. Сколько учениц опубликовали по одной фотографии?

   Решение. Пусть сначала каждая из учениц опубликует по одной фотографии, при этом будет опубликовано 50 фотографий из 60. Остается опубликовать 10 фотографий, назовем их дополнительными. Всего у нас пять разных классов (параллелей), и эти 10 фотографий должны быть опубликованы разными ученицами разных классов, причем в разных количествах. Осталось заметить, что $1+2+3+4=10$, т.е. одну дополнительную фотографию может опубликовать только одна ученица какого-то класса, две дополнительных – другая, из другого класса, и так далее, всего четыре ученицы четырех разных классов. Поэтому по одной фотографии опубликовали 46 учениц из какого-то класса (параллели), а четыре ученицы еще четырех классов опубликовали оставшиеся 14 фотографий, одна – две, одна – три, одна – четыре, одна – пять.

   Ответ. 46 учениц опубликовали по одной фотографии.

2. Найдите значение выражения

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+2018^2+2020^2-1^2-3^2-5^2-\ldots-2017^2-2019^2$$

   Решение.

$$\begin{aligned}
&2020^2-2019^2+2018^2-2017^2+\ldots+6^2-5^2+4^2-3^2+2^2-1^2=\\
&=(2020-2019)(2020+2019)+(2018-2017)(2018+2017)+\ldots+\\
&+(6-5)(6+5)+(4-3)(4+3)+(2-1)(2+1)=\\
&=2020+2019+2018+2017+\ldots+6+5+4+3+2+1=\\
&=\frac{2020+1}{2}\cdot 2020=2041210
\end{aligned}$$

   Ответ. 2041210.

3. a и b – положительные числа, и $a+b=2$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\geq 1$$

   Решение. Напишем два равенства.

$$\frac{1}{a^2+1}=\frac{a^2+1-a^2}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}$$

   Аналогично

$$\frac{1}{b^2+1}=1-\frac{b^2}{b^2+1}$$

   Перепишем неравенство в равносильной форме.

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\geq 1$$

$$1-\frac{a^2}{a^2+1}+1-\frac{b^2}{b^2+1}\geq 1$$
$$\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}\leq 1$$

Докажем это неравенство. Используем известное неравенство $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$.

$$a^2+1\geq 2a$$
$$\frac{1}{a^2+1}\leq\frac{1}{2a}$$
$$\frac{a^2}{a^2+1}\leq\frac{a}{2}$$

Аналогично

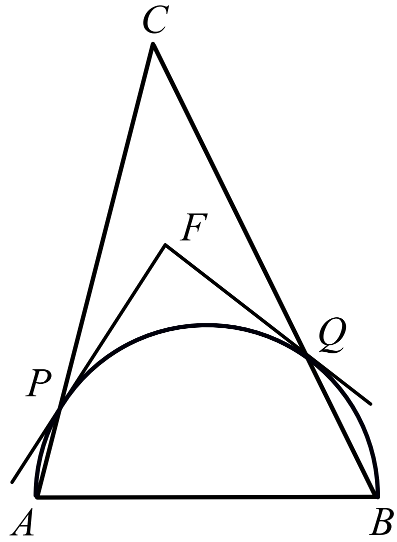
$$\frac{b^2}{b^2+1}\leq\frac{b}{2}$$

Сложим эти неравенства

$$\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}\leq\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=1$$

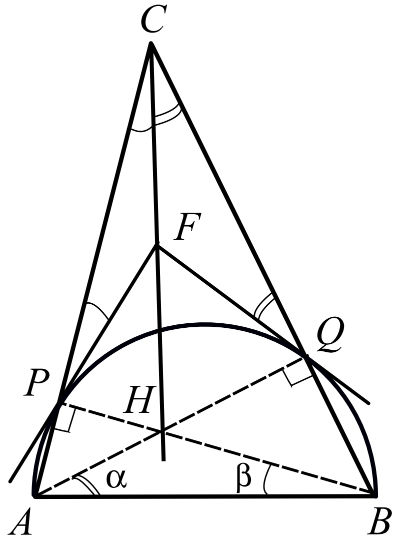
Здесь учтено $a+b=2$, поэтому правая часть равна 1. Доказанное неравенство равносильно неравенству в условии задачи.

4. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB является диаметром окружности, которая пересекает боковые стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Касательные к окружности, проведенные в точках P и Q, пересекаются в точке F. Докажите, что прямые CF и AB перпендикулярны.



Решение. Проведем отрезки AQ и BP. Они являются высотами треугольника ABC, это непосредственно следует из того, что AB – диаметр. Пусть эти высоты пересекаются в точке H. Докажем, что прямая CF проходит через точку H, тогда она будет содержать высоту треугольника и окажется перпендикулярной AB. Обозначим углы $\angle BAQ=\alpha, \angle ABP=\beta$. По известной теореме, угол между хордой и касательной равен вписанному углу, опирающемуся на эту хорду. Поэтому также выполняются равенства $\angle CQF=\alpha, \angle CPF=\beta$. Далее, $\angle AHB=180^\circ-\alpha-\beta=\angle PHQ$.

$\angle FPH = 90° - \beta$, $\angle FQH = 90° - \alpha$. Можем вычислить величину угла PFQ. $\angle PFQ = 360° - \angle FPH - \angle FQH - \angle PHQ = 2(\alpha + \beta)$. Теперь заметим, что углы треугольника ABC выражаются через α и β. $\angle CAB = 90° - \beta$, $\angle CBA = 90° - \alpha$, $\angle ACB = \alpha + \beta$. Отрезки касательных FP и FQ равны между собой, можно построить окружность с центром в точке F и радиусом $FP = FQ$. Центральный угол $\angle PFQ$ в два раза больше угла $\angle PCQ$, поэтому точка C лежит на этой же построенной окружности. Мы получили, что $FP = FQ = FC$, поэтому $\angle FCQ = \alpha$. В треугольнике ABC высота, проведенная из вершины C, составляет угол α со стороной CB (это известный факт, вытекающий из подобия двух прямоугольных треугольников с общей вершиной B). Отсюда следует, что прямая CF содержит высоту треугольника.



5. Даны натуральные числа 1, 2, 3 ..., 10, 11, 12. Разделите их на две группы так, чтобы частное от деления произведения всех чисел первой группы на произведение всех чисел второй группы было бы целым числом, и принимало наименьшее возможное значение. Чему равно это частное?

   Решение. Разложим данные нам числа на простые множители и найдем их произведение.
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$
   Множители 7 и 11 не имеют пары. Один из множителей 3 не имеет пары. Поэтому, чтобы частное было целым, эти простые множители, не имеющие пар, необходимо поставить в числитель. Частное не может получиться меньше, чем дают эти три несократимых множителя. Остальные тройки, пятерки и двойки нужно расставить попарно в числитель и знаменатель так, чтобы пары сократились. Один из способов написан ниже.
$$\frac{7 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 12} = 231$$
   Ответ. 231.