10 класс. Решения и критерии

1. Числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$ написаны на доске. Можно дописать на доску сумму, разность или произведение любых двух *различных* чисел, уже выписанных на доске. Докажите, что можно выписать на доске число 1.

Решение: Например, получаем $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, затем $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ и $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = 5-2 = 3$, затем $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{10}$, потом $\sqrt{10}-3$ и $\sqrt{10}+3$ и наконец $(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3) = 10-9 = 1$.

Критерии. Цель достигнута в случае, когда при некоторых операциях используются одинаковые числа (это запрещено условием) – 3 балла.

2. Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} > \frac{1}{2}.$$

Решение.

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} > \frac{a}{2a+2b+2c}+\frac{b}{2b+2c+2a}+\frac{c}{2c+2a+2b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}.$$

Замечание: на самом деле эта сумма не меньше 1. Пусть $a+2b = x$, $b+2c = y$ и $c+2a = z$. Тогда $a = \dfrac{x-2y+4z}{9}$, $b = \dfrac{y-2z+4x}{9}$ и $c = \dfrac{z-2x+4y}{9}$. Значит,

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} = \frac{x-2y+4z}{9y}+\frac{y-2z+4x}{9z}+\frac{z-2x+4y}{9x} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\frac{4}{9}\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)-\frac{6}{9} \geqslant \frac{1}{9}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}}+\frac{4}{9}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}}-\frac{2}{3} = 1.$$

Критерии. Только проверка частных случаев при конкретных a, b, c – не более 1 балла. Неравенство сведено к другому неравенству, которое участник считает очевидным или общеизвестным, а читатель не считает таковым – не более 3 баллов в зависимости от степени продвижения.

3. Из 80 одинаковых деталей Lego собрали несколько фигурок, причем число использованных деталей во всех фигурках разное. На изготовление трех самых маленьких фигурок ушло 14 деталей, в трех самых больших использовано суммарно 43. Сколько собрали фигурок? Сколько деталей в самой большой фигурке?

Ответ. 8 фигурок, 16 деталей.

Решение. Обозначим число деталей в фигурках через $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Если $a_3 \leqslant 5$, то $a_3+a_2+a_1 \leqslant 5+4+3 = 12 < 14$. Значит, $a_3 \geqslant 6$.

Аналогично можно рассмотреть три самых больших фигурки: $14+15+16 = 45 > 43$, поэтому $a_{n-2} \leqslant 13$.

Уберем три самых больших и три самых маленьких фигурки. В оставшихся будет $80-14-43 = 23$ детали, причем в каждой от 7 до 12. Одной фигурки явно не хватит, а три будет лишнего $(7+8+9 = 24)$. Значит, 23 детали образуют 2 фигурки. Это возможно, причем единственным способом: $23 = 11+12$. Имеем $43 = 13+14+16$ – единственное разложение с $a_6 \geqslant 13$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только правильные оценки для a_3 и a_{n-2} – 3 балла. Только обоснованный ответ для числа фигурок – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.

4. Диагонали описанной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Радиусы вписанных окружностей треугольников AOD, AOB, BOC равны 6, 2 и 3/2 соответственно. Найдите радиус вписанной окружности треугольника COD.

Ответ: 3

Решение. Докажем более общее утверждение, что $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$, где r_1, r_2, r_3 и r_4 – радиусы вписанных окружностей треугольников AOD, AOB, BOC и COD соответственно.

Обозначим $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$, $OA=x$, $OD=y$, $S_{\Delta AOD}=S$. Пусть $\frac{b}{d}=k$.

Треугольник COB подобен треугольнику AOD с коэффициентом k, поэтому $S_{\Delta COB}=k^2S$, $OB=ky$, $OC=kx$, $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta COD}=kS$. Тогда

$$r_1=\frac{2S}{x+y+d},\quad r_3=\frac{2k^2S}{kx+ky+b},\quad r_2=\frac{2kS}{ky+x+a},\quad r_4=\frac{2kS}{kx+y+c}.$$

Значит,

$$2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}\right)=\frac{x+y+d}{S}+\frac{kx+ky+b}{k^2S}=\frac{x+y}{S}+\frac{x+y}{kS}+\frac{dk+\frac{b}{k}}{kS}=\frac{x+y}{S}+\frac{x+y}{kS}+\frac{b+d}{kS}.$$

Здесь мы использовали, что $dk=b$ и $\frac{b}{k}=d$ из подобия треугольников AOD и BOC. Далее,

$$2\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}\right)=\frac{kx+y+c}{kS}+\frac{x+ky+a}{kS}=\frac{x+y}{S}+\frac{x+y}{kS}+\frac{a+c}{kS}=\frac{x+y}{S}+\frac{x+y}{kS}+\frac{b+d}{kS},$$

где $a+c=b+d$, поскольку трапеция описанная. Таким образом, мы доказали, что $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$.

По условию, $\frac{1}{6}+\frac{1}{1,5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{r_4}$, откуда $r_4=3$.

Критерии. В решении есть утверждение, которое не является общеизвестным и которое читатель не способен сам установить за 5 минут – не более 3 баллов.

5. На доске 10×10 расставлены 10 фишек так, что в каждом горизонтальном и вертикальном ряду стоит по одной фишке. Можно ли оставшуюся часть доски замостить прямоугольниками 1×2 (по клеткам)?

Ответ: нельзя.

Решение. Раскрасим доску в шахматном порядке и занумеруем строки и столбцы. Если оставшуюся часть доски можно замостить прямоугольниками 1×2, то она содержит одинаковое число чёрных и белых клеток, тогда 5 фишек стоят на чёрных клетках, и 5 на белых. Заметим, что у белой клетки сумма номера строки и столбца чётна, а у чёрной – нечётна. Следовательно, сумма номеров строк и столбцов, в которых стоят фишки, нечётна (как сумма пяти чётных и пяти нечётных чисел). Но поскольку фишки стоят на каждой горизонтали и каждой вертикали, то сумма номеров строк и столбцов равна $2(1+2+\ldots+10)$, что является чётным числом. Полученное противоречие доказывает, что замостить доску требуемым образом нельзя.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только несколько конкретных частных случаев расположения фишек – не более 1 балла. При произвольном расположении фишек невозможность разместить доминошки доказывается (незаконченным) перебором вариантов расположения доминошек – до 2 баллов в зависимости от степени общности рассмотренного случая.