10 класс

10.1. Существуют ли такие три положительных числа *a*, *b*, *c*, что каждый из трех квадратных трехчленов ax^2+bx+c, bx^2+cx+a, cx^2+ax+b имеет хотя бы один корень?
Ответ: не существуют. **Решение**. См. задачу 9.1.

10.2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $4x^2y^2 = 4xy+3$.

Решение. Данное уравнение приведем к эквивалентному: $(2xy-1)^2 = 4 \Leftrightarrow 2xy = 1 \pm 2$. Таким образом, искомое множество точек состоит из двух гипербол $y = \frac{3/2}{x}$ и $y = \frac{-1/2}{x}$ (в каждом квадранте будет по одной ветви соответствующей гиперболы).

10.3. Из натуральных чисел 1, 2, …, 1001 выбирают группу чисел так, чтобы наибольший общий делитель любых двух чисел из группы был больше двух. Каким может быть наибольшее количество чисел в такой группе?
Ответ. 333. **Решение**. См. аналогичную задачу 9.3.

10.4. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой квадрат натурального числа.
Ответ. 986431. **Решение.** Очевидно, среди этих цифр нуля нет. Далее, имеем $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 9=2^7\cdot 3^4\cdot 5^1\cdot 7^1$. Поэтому надо убрать цифры 5, 7, а также нужно нечетную степень двойки сделать четной. Значит, надо убрать цифру 2: очевидно, не следует убирать цифры 6 и 8, т.к. нам нужен максимальный результат. Ясно, что оставшиеся цифры нужно расположить в порядке убывания: 986431. В результате получим произведение этих цифр, равное $5184=(72)^2$.

10.5. Дан треугольник *ABC*, у которого $\angle A = 40°$, $\angle C = 20°$. Докажите, что длина биссектрисы, проведенной из вершины *B*, равна $AC - BC$.
Решение. Пусть *BM* – биссектриса угла *B*. Достроим ΔABC до равнобедренного треугольника *ADC*, продолжив отрезок *CB* за точку *B* так, что $CD = CA$ (очевидно, $CB<CA$, т.к. угол *B* больше угла *A*). Имеем: $\angle DBA == 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$ по свойству внешнего угла. Значит, $\angle ABM = \angle MBC = 60°=\angle DBA$. Далее, $\angle DAC = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80°$, $\angle DAB = 80° - 40° = 40°$. Значит, треугольники *ABM* и *ABD* равны (по общей стороне *AB* и равным прилежащим углам). Тогда $DB = BM$ и поэтому $BM = CD - BC = AC - BC$.