

**Муниципальный тур ВСОШ олимпиады по математике
(2020/2021 уч. год)**

Ответы и решения заданий

Общие критерии оценивания каждой задачи:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задания для 10 класса

Задача №1. Проанализируйте данные 15 условий и дайте ответ на вопрос задачи.

1. На улице в ряд стоят пять домов.
2. Англичанин живёт в красном доме.
3. У испанца есть собака.
4. В зелёном доме пьют кофе.
5. Украинец пьёт чай.
6. Зелёный дом стоит сразу справа от белого дома.
7. Тот, кто курит сигареты «Золотое руно», разводит улиток.
8. В жёлтом доме курят сигареты Спорт.
9. В центральном доме пьют молоко.
10. Норвежец живёт в первом доме.
11. Сосед того, кто курит сигареты «Прима», держит лису.
12. В доме по соседству с тем, в котором держат лошадь, курят сигареты «Спорт».
13. Тот, кто курит сигареты «Столичные», пьёт апельсиновый сок.
14. Японец курит сигареты «Кент».
15. Норвежец живёт в доме рядом с синим домом.

Кто же пьёт воду? Кто держит зебру?

В целях ясности следует добавить, что каждый из пяти домов окрашен в свой цвет, а их жители — разных национальностей, владеют разными животными, пьют разные напитки

и курят разные марки американских сигарет. Ещё одно замечание: в утверждении б справа означает справа относительно вас.

Ответ: зебру держит японец, а воду пьёт норвежец.

Решение

Здесь приведены дедуктивные шаги, следуя которым можно получить решение. Суть метода заключается в том, чтобы попытаться вписать известные соотношения в таблицу, последовательно исключая невозможные варианты. Ключевые умозаключения выделены курсивом.

Шаг 1

По условию норвежец живёт в первом доме (10). Не имеет значения откуда — слева или справа — ведётся нумерация. Нас интересует только порядок домов, а не направление, в котором они нумеруются.

Из (10) и (15) следует, что второй дом синий. Какого цвета первый дом? Не зелёный и не белый, потому что они должны стоять рядом (это следует из 6-й посылки и того, что 2-й дом синий). Не красный, потому что там живёт англичанин (2). Поэтому *первый дом жёлтый*. Из этого следует, что в первом доме курят «Спорт» (8), а во втором доме держат лошадь (12).

Что пьёт норвежец, который живёт в первом, жёлтом доме и курит «Спорт»? Это не чай, поскольку чай пьёт украинец (5). И не кофе, потому что кофе пьют в зелёном доме (4). И не молоко, которое пьют в третьем доме (9). И не апельсиновый сок, потому что человек, который пьёт сок, курит «Столичные»(13). Следовательно, норвежец пьёт воду, и это ответ на первый вопрос загадки.

дом	1	2	3	4	5
цвет	жёлтый	синий	?	?	?
национальность	норвежец	?	?	?	?
напиток	<i>вода</i>	?	молоко	?	?
сигареты	Спорт	?	?	?	?
животное	?	лошадь	?	?	?

Шаг 2

Тогда что же курят во втором, синем доме, где, как мы знаем, держат лошадь? Это не «Спорт», который курят в первом доме (8). И не «Золотое руно», поскольку тот, кто их курит, разводит улиток (7).

Предположим, что в нём курят «Столичные», что означает, что здесь же пьют апельсиновый сок (13). В таком случае, кто может здесь жить? Это не норвежец — он живёт в первом доме (10). Не англичанин — его дом красный (2). Не испанец, поскольку испанец держит собаку (3). Не украинец, потому что украинец пьёт чай (5). И не японец, который курит «Кент»(14). Так как данная ситуация невозможна, то во втором доме курят не «Столичные».

Предположим, что во втором доме курят «Кент», из чего следует, что здесь живёт японец (14). В таком случае, что он пьёт? Не чай, поскольку чай пьёт украинец (5). Не кофе — кофе пьют в зелёном доме (4). Не молоко — молоко пьют в третьем доме (9). И не сок, потому что сок пьёт человек, который курит «Столичные» (13). Итак, данная ситуация также невозможна, и во втором доме курят не «Кент». Следовательно, *во втором доме курят «Приму»*.

Какой национальности человек, живущий во втором, синем доме, предпочитающий «Приму» и держащий лошадь? Это не норвежец — он в первом доме (10). Не англичанин — он в красном доме (2). Не испанец — у испанца собака (3). Не японец — японец курит сигареты «Кент» (14). Значит, во втором доме живёт украинец и, как следует из (5), пьёт чай!

дом	1	2	3	4	5
цвет	жёлтый	синий	?	?	?
национальность	норвежец	украинец	?	?	?
напиток	<i>вода</i>	чай	молоко	?	?
сигареты	Спорт	Прима	?	?	?
животное	?	лошадь	?	?	?

Шаг 3

Так как «Приму» курят во втором доме, то из (11) нам становится известно, что лису держат либо в первом, либо в третьем доме.

Давайте сначала предположим, что лиса в третьем доме. В таком случае, что пьёт человек, который курит «Золотое руно» и разводит улиток (7)? Мы уже исключили воду и чай на предыдущих шагах. Он также не может пить сок, поскольку сок пьёт человек, который курит «Столичные» (13). Молоко тоже не подходит — его пьют в третьем доме (9), где, как мы предположили, держат лису. Остаётся кофе, который, по условию, пьют в зелёном доме (4).

Итак, если в третьем доме держат лису, то в зелёном доме живёт человек, который курит «Золотое руно», разводит улиток и пьёт кофе. Кто этот человек? Он не норвежец — норвежец в первом доме (10). Не украинец — тот пьёт чай (5). Не англичанин — тот живёт в красном доме (2). Не японец — он курит «Кент» (14). И не испанец — у испанца собака (3).

Такая ситуация невозможна. Из чего следует, что *лису держат в первом доме*, а не в третьем.

дом	1	2	3	4	5
цвет	жёлтый	синий	?	?	?
национальность	норвежец	украинец	?	?	?
напиток	<i>вода</i>	чай	молоко	?	?
сигареты	Спорт	Прима	?	?	?
животное	лиса	лошадь	?	?	?

Шаг 4

Из всего вышеизложенного следует, что кофе и апельсиновый сок пьют в четвёртом и пятом доме. Не имеет значения, какой из напитков — в каком доме; будем просто называть их «дом, где пьют сок» и «дом, где пьют кофе».

Итак, где живёт человек, который курит «Золотое руно» и разводит улиток? Не в доме, где пьют сок, потому что там курят сигареты «Столичные» (13).

Предположим, что он живёт в доме, где пьют кофе. Тогда человек, который курит «Золотое руно», разводит улиток и пьёт кофе, живёт в зелёном (4) доме. Опять же, по тем же соображениям, что и в шаге 3, это невозможно.

Значит, человек, который курит «Золотое руно» и разводит улиток, живёт в третьем доме.

дом	1	2	3	4	5
цвет	жёлтый	синий	?	?	?
национальность	норвежец	украинец	?	?	?
напиток	<i>вода</i>	чай	молоко	?	?
сигареты	Спорт	Прима	Золотое руно	?	?
животное	лиса	лошадь	улитки	?	?

Отсюда следует, что «Кент» курят в зелёном доме, где пьют кофе, а живёт там японец (14). Это означает, что испанец — тот, кто пьёт апельсиновый сок, курит «Столичные» и держит собаку. Продолжая эти рассуждения, приходим к выводу, что англичанин должен жить в третьем доме, и дом этот — красный. Методом исключения получаем, что дом испанца белый.

дом	1	2	3	4	5
цвет	жёлтый	синий	красный	белый	зелёный
национальность	норвежец	украинец	англичанин	испанец	японец
напиток	<i>вода</i>	чай	молоко	сок	кофе
сигареты	Спорт	Прима	Золотое руно	Столичные	Кент
животное	лиса	лошадь	улитки	собака	?

Теперь мы заполнили все пробелы, кроме одного, и, очевидно, что зебру держит японец.

Ответ: зебру держит японец, а воду пьёт норвежец.

дом	1	2	3	4	5
цвет	жёлтый	синий	красный	белый	зелёный
национальность	норвежец	украинец	англичанин	испанец	японец
напиток	<i>вода</i>	чай	молоко	сок	кофе
сигареты	Спорт	Прима	Золотое руно	Столичные	Кент
животное	лиса	лошадь	улитки	собака	зебра

Задача №2

Двое играют в игру. Ходы, которые делаются по очереди, заключаются в том, что из кучки в N камней убирается любое число камней от 1 до 5. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто выиграет в данной игре?

Ответ. Если число N кратно 6, то выиграет второй, если нет, то выиграет первый.

Решение.

Выработку стратегии лучше начинать с небольшого числа камешков. Понятно, что если в нашей кучке меньше шести камней, тогда выиграет первый игрок: он первым своим ходом заберет все камни.

Если бы в нашей кучке было 6 камешков, тогда понятно, что второй выиграет, так как он забрал бы все оставшиеся камни после первого хода начинающего.

Если камней семь? Что делать тогда первому? Ему нужно забрать один камень и свести задачу к предыдущему случаю. Аналогично надо выработать стратегию игры и для 8, 9, 10, 11 камней, то есть ему нужно первым ходом взять 2 (3, 4, 5 камней) и оставить 6 камней. Тогда при любом ходе второго игрока, останется ровно столько, сколько можно забрать первому за один ход.

Когда камней 12, то понятно, что выиграет второй: как бы первый не ходил, он своим ходом может взять такое количество камней, чтобы осталось ровно 6. А в этом случае он выигрывает, как мы уже разобрали.

Итак, если число камней делится на 6, то выигрывает второй, если не делится, то первый. Докажем это.

Пусть у нас $6t$ камней. После первого хода игрока, начинающего игру, второй делает ход, после которого остается $6t - 6$ камней, т. е. число камней в кучке уменьшилось на 6. Несложно понять, что последний камень возьмет игрок, делающий второй ход, и также понятно, что у него всегда есть возможность сделать ход.

Пусть у нас $6t + a$, где $1 < a < 5$, камней. Тогда начинающий первым своим ходом убирает все, что «мешает», т. е. a камней, и остается всего $6t$ камней, т. е. сводит игру к рассматриваемому выше случаю, где он уже второй игрок. Значит, в этом случае побеждает игрок, делающий первый ход.

Задача №3.

Какое наибольшее число ребер шестиугольной призмы может пересечь плоскость, не проходящая через вершины призмы.

Ответ: 8 ребер.

Решение.

Горизонтальная плоскость может пересечь все 6 боковых ребер. Наклоним эту плоскость так, чтобы она пересекла верхнее основание около одной из вершин. Ясно, что при этом она станет пересекать два ребра в верхнем основании, но не будет пересекать одно из боковых ребер. Таким образом, мы увеличили число ребер, пересекаемых плоскостью на 1.

Точно так же можно увеличить это число еще на 1 за счет ребер нижнего основания. Так мы получаем плоскость, пересекающую 8 ребер призмы.

Докажем, что большего количества пересечений сделать невозможно. Во-первых, никакое сечение не может пересекать более двух ребер одного основания. В противном случае сечение просто совпало бы с плоскостью этого основания. Но пересечение двух ребер в одном основании исключает пересечение по крайней мере хотя бы одного из боковых ребер, а пересечение двух ребер в другом основании – другого бокового ребра.

Задача №4.

Найти площадь фигуры, заданной неравенством

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 2|x| + 2|y|.$$

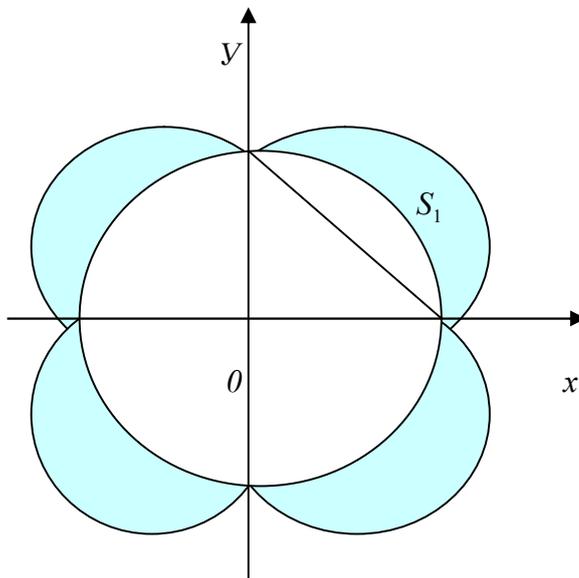
Ответ: Тогда площадь всей фигуры – 8 (кв.ед.)

Решение.

Левой частью неравенства задана внешняя часть плоскости по отношению к кругу с центром в начале координат и радиусом 2 (далее окружность 1). Правой частью неравенства задана часть плоскости, лежащая внутри линии, заданной уравнением: $x^2 + y^2 = 2|x| + 2|y|$. Выделяя полный квадрат, преобразуем его к виду: $(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 2$. Легко видеть, что данная линия симметрична относительно координатных осей, поэтому построим часть ее, расположенную в первой четверти, и заданную уравнением $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ (далее окружность 2). Получим часть окружности с центром в (1,1) и

радиуса $\sqrt{2}$.

В



результате
мы получили фигуру:

Площадь ее равна $S = 4S_1$, где S_1 – площадь фигуры, расположенная в первой четверти. Она состоит из

$$S_1 = S_{\Delta} + \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{4}S_3 = \frac{1}{2}2 \cdot 2 + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = 2,$$

где S_2 – площадь круга, ограниченного окружностью 2, S_3 – площадь круга, ограниченного окружностью 1.

Тогда площадь всей фигуры – 8 (кв.ед.)

Задача №5.

Последовательность из двух различных чисел продолжили двумя способами так, чтобы получилась геометрическая прогрессия, и так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. При этом третий член геометрической прогрессии совпал с десятым членом арифметической прогрессии. А с каким членом арифметической прогрессии совпадет четвертый член этой же геометрической прогрессии?

Ответ: с 74-м членом арифметической прогрессии.

Решение.

Пусть a – первое из двух чисел исходной последовательности, d – разность арифметической прогрессии, а q – знаменатель геометрической прогрессии. Тогда по условию задачи $a + d = aq$, $a + 9d = aq^2$. Следовательно, $a(q - 1) = d$ и

$$a(q - 1)(q + 1) = a(q^2 - 1) = 9d = 9a(q - 1).$$

Поскольку $q \neq 1$, отсюда получаем $q = 8$ и

$$aq^3 = a + (q^3 - 1) = a + a(q - 1)(q^2 + q + 1) = a + 73d.$$

Таким образом, четвертый член геометрической прогрессии совпал с 74-м членом арифметической прогрессии.