МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ТУР
2020 — 2021 УЧ. Г.

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ
10 класс

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1) Максимальная оценка за каждую задачу — **7 баллов**.

2) **7 баллов** ставится за безукоризненное решение задач;

6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение.

4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом.

2 или 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении.

1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален.

Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в **0 баллов**, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школь-

ник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т. п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты — **varyag2@mail.ru**, тел. **+7 922 035 03 24**).

10 КЛАСС

10.1 *Уравнение* $(x+a)(x+b) = 9$ *имеет корень* $a+b$. *Докажите, что тогда* $ab \leqslant 1$.

Решение. По условию $(2a+b)(2b+a) = 9$. Проведём равносильные преобразования:

$$2a^2 + 2b^2 + 5ab = 9$$

$$2(a-b)^2 + 9ab = 9$$

$$ab = 1 - \frac{2}{9}(a-b)^2$$

и утверждение задачи становится очевидным, так как $\frac{2}{9}(a-b)^2$ — число неотрицательное.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верное доказательство	7 баллов
Получено верное уравнение, связывающая параметры a и b	1 балл
Утверждение задачи проиллюстрировано на примерах	0 баллов

10.2 *Известно, что* 10% *человек владеют не менее, чем* 90% *всех денег в мире. Для какого наименьшего количества (в процентах) всех людей можно гарантировать, что эти люди владеют* 95% *всех денег?*

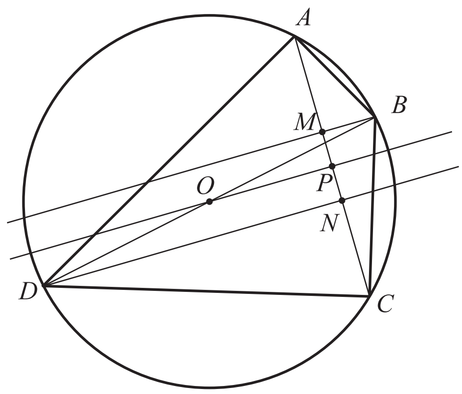
Решение. Пусть $100S$ — количество всех денег в мире (не важно, в каких денежных единицах), а всего людей $100N$ (N может быть не целым, что не важно). Тогда по крайней мере $90S$ денег находятся во владении $10N$ человек (назовём эту группу *олигархами*). У остальных $90N$ человек (назовём их *обывателями*) денег в совокупности меньше, чем $10S$. Возьмём половину наиболее бедных обывателей. У этих $45N$ человек денег не более половины от денег всех обывателей, что не больше $5S$. Значит, если мы возьмём всех людей, кроме этих $45N$, у них в сумме будет не менее, чем $95S$ денег. Всего этих людей $55N$, что составляет 55%. Мы доказали, что 55% самых богатых людей владеют 95% или более всех денег.

Приведём пример, показывающий, что меньше, чем 55% может и не получится. Пусть всего имеется 100 человек, 10 из которых имеют по 81 млн, а 90 — по 1 млн. Тогда из 900 млн общего капитала 90% (810 млн) принадлежит первым десяти людям, и условие задачи выполнено. 95% капитала составляет сумму 855 млн. Чтобы её набрать, необходимо 55 самых богатых людей: $10 \cdot 81 + 45 \cdot 1$.

Ответ: 55%.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	**ОЦЕНКА**
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Задача верно решена в конкретных денежных единиц (например, в предположении, что всего денег 10 000 000 000 юаней)	баллов не снижать
Доказано, что 55% самых богатых людей владеют не менее, чем 95% всех денег, но нет примера, показывающего точность оценки, ИЛИ приведён пример, показывающей точность оценки 55%, но нет доказательства, что пример оптимальный	3 балла
Примеры, когда «богатых» людей больше, чем 55% и/или приведены более грубые оценки, чем 55%	0 баллов

10.3 *В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. Из точек B и D опустили перпендикуляры на диагональ AC и получили соответственно точки M и N. Докажите, что $AM = CN$.*



К решению задачи 10.3

Решение. Так как углы A и C — прямые, четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром BD. Пусть точка O — её центр. Проведём через O прямую, перпендикулярную прямой AC, и пусть она пересекает AC в точке P. Точка P — середина хорды AC (радиус, перпендикулярный хорде, делит последнюю пополам). С другой стороны, прямые BM, OP и DN параллельны (они перепендикулярны одной и той же прямой AC) и прямая OP делит пополам отрезок BD с концами на двух других прямых. Тогда прямая OP находится на равном расстоянии от прямых BM и DN, поэтому она будет делить пополам любой отрезок с концами на этих прямых, в частности, отрезок MN. Остаётся заметить, что $AM = AP - PM = CP - PN = CN$ (если расположение точек A и C такое, как на приведённом рисунке) или $AM = AP + PM = CP + PN = CN$ (если точки A и C поменяны местами).

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верное доказательство	7 баллов
Из двух случаев: M лежит между точками A и N или, наоборот, N лежит между точками A и M, рассмотрен один	баллов не снижать
Имеется идея рассмотреть серединный перпендикуляр к отрезку MN (или к отрезку AC)	2 балла
Замечено, что четырёхугольник $ABCD$ вписывается в окружность (эквивалентно, доказано равенство углов типа $\angle CAB = \angle CDB$)	1 балл
Всевозможные дополнительные построения, факты и выкладки, из которых ход решения не виден, а равно решение задачи в в частных случаях (например, в предположении, что $AC \perp BD$)	0 баллов

10.4 *Пусть n — натуральное число, большее 10. Какая цифра может стоять сразу после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{n^2+n}$? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение. Способ 1. $n^2+n=(n+0,5)^2-0,25<(n+0,5)^2$. Тогда $n<\sqrt{n^2+n}<n+0,5$. Значит, целая часть рассматриваемого числа совпадает с числом n, а далее, после запятой, идёт цифра, меньшая 5. Предположим, что она меньше и числа 4 тоже. Тогда $\sqrt{n^2+n}<n+0,4$, что равносильно условию $n^2+n<n^2+0,8n+0,16$, то есть неравенству $n<8$. Поскольку это неверно (по условию $n>10$), цифра, идущая сразу после запятой, не менее 4. То есть, это 4.

Способ 2. Искомая цифра — последняя цифра в числе $\left[10\sqrt{n^2+n}\right]=\left[\sqrt{100n^2+100n}\right]$. Заметим, что $100n^2+100n<100n^2+100n+25=(10n+5)^2$, и $100n^2+100n=100n^2+80n+20n>100n^2+80n+16=(10n+4)^2$. Тогда $\left[\sqrt{100n^2+100n}\right]=10n+4$, и последняя цифра этого числа 4.

Способ 3. Имеем $n+0,4<\sqrt{n^2+n}<n+0,5$, так как $n^2+0,8n+0,16<n^2+n<n^2+n+0,25$. Значит, первая после запятой цифра — цифра 4.

Ответ: 4.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верной последовательности всех шагов решения одно из неравенств решено неверно, что, возможно, привело к неверному ответу	5 баллов
Доказано одно из двух утверждений: а) искомая цифра меньше 5; б) искомая цифра больше 3; плюс приведён пример для цифры 4	4 балла
Доказано одно из двух утверждений: а) искомая цифра меньше 5; б) искомая цифра больше 3	3 балла
Задача верно сведена к системе неравенств или к уравнению с целой частью	2 балла
Верный ответ, проиллюстрированный примером, что цифра 4 возможна	1 балл
Верный ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

10.5 *Ваня сдал три ЕГЭ: по русскому, математике и физике. По русскому он набрал на* 5 *баллов меньше, чем по физике, а по физике — на* 9 *баллов меньше, чем по математике. Золотая рыбка, приснившаяся Ване, пообещала ему выполнить любое количество желаний следующих видов:*

1) прибавить по баллу за каждый экзамен;

2) за один экзамен (по выбору Вани) уменьшить баллы на 3, *а за два остальных — увеличить на* 1.

Рыбка исполняет желание, если при этом ни один результат не превысит 100 *баллов. Может ли случится так, что Ваня во сне*

а) наберёт 100 *баллов хотя бы по двум экзаменам;*

б) наберёт 100 *баллов по всем трём экзаменам?*

Решение. В результате выполнения каждого желания разность между баллами, набранными на любых двух экзаменах, либо остаётся неизменной, либо меняется на 4. Значит, эта разность каждый раз сохраняет остаток при делении на 4. Изначальные разности равны 5, 9 и 14; они дают остатки 1, 1 и 2. Значит, ни в какой момент остаток не будет равен 0, и, следовательно, всегда баллы за любые два экзамена будут разными. Поэтому 100 баллов можно набрать только по одному экзамену ЕГЭ.

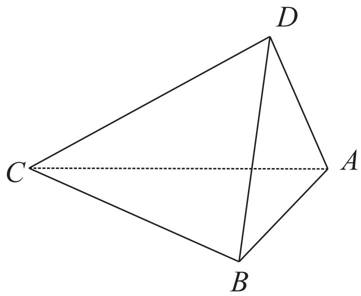
Ответ: а) Не может. б) Не может.

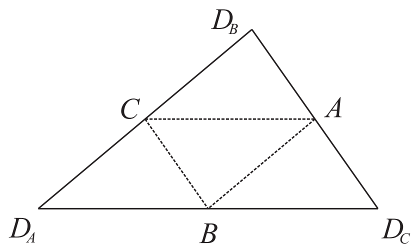
Примечание. Для доказательства невозможности ситуации в пункте б) достаточно замечания, что при любых действиях рыбки меняется чётность всех трёх оценок, поэтому оценка Вани по физике никогда не станет равной ни оценке по математике, ни оценке по русскому языку.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ к обоим пунктам задачи	7 баллов
Рассматриваются остатки от деления числа баллов на какое-либо число, кратное 4 при нерешённом пункте а и верно решённом пункте б)	5 баллов
Рассматриваются остатки от деления числа баллов на какое-либо число, кратное 4 (при нерешённых обоих пунктах задачи) а)	3 балла
Верно доказана только невозможность ситуации в пункте б)	2 балла
Замечен инвариант: изменение чётности баллов за каждый экзамен	1 балл
Конкретные варианты изменения баллов, как иллюстрация невозможности получения 100 баллов за 3 или хотя бы 2 экзамена	0 баллов

10.6 *Некоторый тетраэдр $DABC$ разрезали по рёбрам DA, DB и DC и осуществили развёртку его поверхности на плоскость основания ABC. Оказалось, что развёртка представляет собой треугольник. Мог ли этот треугольник оказаться прямоугольным? Ответ обоснуйте.*

Решение.





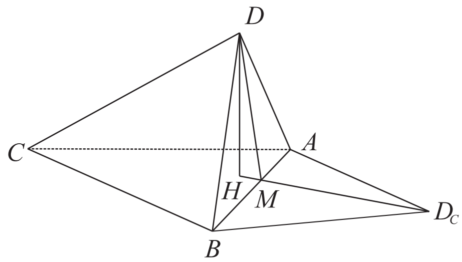
К решению задачи 10.6

Предположим, что это возможно. Тогда рёбра тетраэдра AB, BC и CA будут средними линиями треугольника, получившегося в развёртке. Все грани тетраэдра окажутся равными и подобными (с коэффициентом 0,5) треугольнику-развёртке. Поймём, где на развёртке окажется точка H — основание высоты тетраэдра, опущенной из вершины D. Грань DAB при развёртке перейдёт в треугольник D_CAB (см. рисунок).

Пусть DM — высота боковой грани DAB. Тогда отрезок D_CM будет высотой треугольника D_CAB. Прямая AB будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым DM и D_CM плоскости DD_CM, а тогда и всей этой плоскости. Высота тетраэдра DH

перпендикулярна прямой AB, поэтому она обязана лежать в плоскости DD_CM. Значит, точка H будет лежать на прямой D_CM, которая является перпендикуляром к прямой AB. В случае, когда развёртка образует треугольник, этот перпендикуляр будет лежать на высоте треугольника-развёртки. Аналогично доказывается, что точка H лежит на двух других высотах. Значит, H — ортоцентр треугольника $D_AD_BD_C$.

В условиях нашей задачи треугольник-развёртка прямоугольный, значит, точка H совпадает с вершиной прямого угла. Пусть, без ограничения общности, $H = D_B$. Но тогда треугольник AD_BC есть проекция боковой грани ADC. Это невозможно, так как треугольники ADC и AD_BC равны (переходят друг в друга при повороте относительно ребра AB). Противоречие. Вывод: ситуация невозможна.



К решению задачи 10.6

Ответ: Нет, не мог.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Замечено, но не доказано, что основание высоты тетраэдра является ортоцентром треугольника-развёртки	3 балла
Показано, что в условиях задачи все 4 грани тетраэдра равны	2 балла
Отмечено, что рёбра при основании тетраэдра на развёртке являются средними линиями треугольника	1 балл
Ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов