10 класс

10.1. Может ли натуральное число, имеющее ровно 1234 делителя, быть полным квадратом?

Ответ: нет.

Решение. Пусть $n = m^2$, тогда у n имеется k делителей, меньших m, и столько же, больших m. С учётом m получаем нечётное число делителей.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 балл.

10.2. Докажите неравенство $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<\frac{k-1}{k}$.

Решение. Так как $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ при любом n≥ 2, то сумма $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}$ не превосходит величины

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}.$$

10.3. Докажите, что для целых *a, b, c, d* произведение $A=(b-a)(c-a)(d-a)(b-c)(d-c)(d-b)$ кратно 12.

Решение. Разобьём множество целых чисел на четыре класса $\{4t\}$, $\{4t+1\}$, $\{4t+2\}$, $\{4t+3\}$.

Если среди чисел *a, b, c, d* есть два таких, которые принадлежат одному и тому же классу, то их разность, а значит, и число *A*, делится на 4.

Если же никакие два из чисел *a, b, c, d* не принадлежат одному и тому же классу, то среди них есть два чётных и два нечётных. Разность как двух чётных, так и двух нечётных делится на 2, а поэтому число A делится на 4.

Среди любых четырёх целых чисел *a, b, c, d* всегда найдутся два таких, которые при делении на 3 дают одинаковые остатки. Их разность, а значит и число А, делится на 3.

Комментарий. Доказательство того, что произведение делится на 2 – 1 балл, на 4 (или 3) – 3 балла.

10.4. Дан остроугольный треугольник ABC. Из точки D на стороне AB провели перпендикуляры DE и DF к сторонам AC и BC соответственно. При каком расположении точки D расстояние между точками E и F будет наименьшим?

Ответ: D – основание высоты, опущенной из вершины C.

Решение. Точки E и F лежат на окружности, построенной на отрезке CD как на диаметре. В этой окружности постоянный угол C опирается на хорду EF, поэтому длина хорды EF будет минимальна, если минимален диаметр CD окружности, т. е. CD – высота треугольника ABC.

10.5. Пять спортсменов пришли на тренировку со своими мячами, а уходя, каждый взял чужой. Сколькими способами это возможно.

Ответ: 44.

Решение. Предположим сначала, что никакие два спортсмена не обменялись мячами. Представим их сидящими за круглым столом. Тогда, при различном взаимном расположении, они выбирали мяч следующего (например, по часовой стрелке) спортсмена. Но это возможно только при рассадке 5 за одним столом, то есть 4! = 24 способами.

Рассмотрим случай, когда два спортсмена обменялись мячами. Этих двух их пяти можно выбрать 10 способами, а оставшихся трех рассадим за круглым столом, как и в первом случае, что можно сделать 2! = 2. Таким образом, в этом случае получим 20 способов.

Поскольку обменяться мячами может лишь одна пара спортсменов, то общее число способов будет равно 24 + 20= 44.

Комментарий. Рассмотрим только один из случаев – 3 балла.