Задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020-2021 учебный год
10 класс

Продолжительность олимпиады: 240 минут. Максимальное возможное количество баллов: 35

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
4-5	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача 1 (7 баллов).
Натуральные числа раскрашены в черный и белый цвет. Известно, что сумма белого и черного-черное, а произведение белого и черного – белое. Докажите, что сумма двух белых –белое.

Решение
Пусть даны два белых числа m и n. Докажем, что mn – белое. Пусть k- черное число. Тогда m+k- черное. Найдём mn+kn=(m+k)n – черное умножить на белое –*белое*, kn-белое.
Если mn- черное, то то mn+kn – *черное*. Противоречие. Значит mn – белое.

Задача 2 (7 баллов).
Решите уравнение:
$$\sqrt[8]{x+1}+\sqrt[8]{x-1}=\sqrt[8]{2}$$

Ответ: 1
Решение: Выражение слева имеет смысл при $x \geq 1$, является возрастающей функцией. Поэтому при $x > 1$ оно будет больше постоянной величины справа. Следовательно, x =1.

Задача 3 (7 баллов).
В прямоугольнике площадью 5 кв. единиц расположены девять прямоугольников, площадь каждого из которых равна единице. Докажите, что площадь общей части некоторых двух прямоугольников больше или равна 1/9.

Решение:
Предположим, что площадь общей части любых двух прямоугольников меньше 1/9. Покажем, что тогда они занимают площадь больше 5. Занумеруем прямоугольники: первый, второй, третий и т.д. Первый прямоугольник занимает площадь 1. Добавим второй прямоугольник. Площадь общей части первого и второго прямоугольников меньше 1/9, поэтому добавится площадь больше 8/9. Добавим третий прямоугольник. Площадь общей части третьего прямоугольника с первым и вторым меньше 2/9, поэтому добавится площадь больше 7/9, и т. д. В результате получим, что все девять прямоугольников занимают площадь больше

$$1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\ldots+\frac{1}{9}=5.$$

Задача 4 (7 баллов).
Дан треугольник ABC. Центры вневписанных окружностей O_1, O_2 и O_3 соединены прямыми. Доказать, что треугольник $O_1O_2O_3$ — остроугольный.

Решение.
Центр O_1 вневписанной окружности, касающейся стороны BC, является точкой пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C.

Поэтому $\angle O_1CB = (180-\angle C)/2$, $\angle O_1BC= (180-\angle B)/2$.

Следовательно, $\angle O_3O_1O_2= \angle BO_1C = (180^\circ - \angle A)/2 < 90^o$.

Аналогично доказывается, что $\angle O_1O_2O_3<90^\circ$ и $\angle O_1O_3O_2<90^\circ$.

Задача 5 (7 баллов)
В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральные сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков. С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 647 очков?

Ответ: 11.
Решение.
Наибольшее количество очков, которое может набрать игрок одним броском — 60 (утроение 20), далее идут: 57 очков (утроение 19) и 54 очка (утроение 18). Попадание во все остальные сектора и зоны дают меньше 54 очков. Значит, за 10 бросков он наберет не более 600 очков, а тогда для того, чтобы набрать 647 очков понадобится не менее 11 бросков.
Покажем, что игрок может набрать 647 очков за 11 бросков. Предположим, что он сделал 9 бросков на 60 очков (итого 540), один бросок в зону утроения сектора 19 (57 очко) и один бросок в центральный сектор 50 очков. Тогда в сумме он наберет 540 + 57 + 50 = 647 очков.