10 класс

10.1. Найдите сумму $\sin x + \sin y + \sin z$, если известно, что $\sin x = \operatorname{tg} y$, $\sin y = \operatorname{tg} z$, $\sin z = \operatorname{tg} x$.

Ответ. 0.

Первое решение. Из того, что $\sin x = \operatorname{tg} y$, получаем $\sin x \cos y = \sin y$. Отсюда $|\sin x| \cdot |\cos y| = |\sin y|$. Значит, $|\sin x| \ge |\sin y|$, причем неравенство обращается в равенство только если либо $\sin y = \sin x = 0$, либо когда $|\cos y| = 1$ (а, значит, опять $\sin y = \sin x = 0$). Аналогично, из оставшихся уравнений получаем неравенства $|\sin y| \ge |\sin z|$ и $|\sin z| \ge |\sin x|$. Отсюда $|\sin x| \ge |\sin y| \ge |\sin z| \ge |\sin x|$. Поэтому $|\sin x| = |\sin y| = |\sin z|$. А так как все неравенства обратились в равенства, мы получаем, что $\sin x = \sin y = \sin z = 0$, и $\sin x + \sin y + \sin z = 0$.

Второе решение. Если один из синусов равен нулю, то равный ему тангенс равен нулю, значит, синус, стоящий в числителе тангенса, равен нулю. Последовательно получаем, что остальные синусы и тангенсы равны нулю. В этом случае $\sin x + \sin y + \sin z = 0$.

Пусть ни один из синусов не равен нулю. Перемножив все три равенства, получим $\sin x \sin y \sin z = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z}$. Так как $\sin x \sin y \sin z \ne 0$, то $\cos x \cos y \cos z = 1$. Но это возможно только если $|\cos x| = |\cos y| = |\cos z| = 1$, то есть синусы равны нулю, и рассматриваемый случай невозможен.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Ответ получен рассмотрением примера – 1 балл.

Неверно рассмотрен (или пропущен) хотя бы один случай – не более 3 баллов.

10.2. Дано выражение $A = xy + yz + zx$, где x, y, z – целые числа. Если число x увеличить на 1, а числа y и z уменьшить на 2, то значение выражения A не изменится. Докажите, что число $(-1)\cdot A$ – квадрат целого числа.

Решение. По условию $xy + yz + zx = (x+1)(y-2) + (y-2)(z-2) + (z-2)(x+1)$, откуда $4x + y + z = 0$, или $x = -\dfrac{y+z}{4}$. Тогда $(-1)\cdot A = -(xy + yz + zx) = -yz - x(y+z) = -yz + \dfrac{y+z}{4}(y+z) = \dfrac{(y+z)^2 - 4yz}{4} = \dfrac{(y-z)^2}{4} = \left(\dfrac{y-z}{2}\right)^2$. Так как $y + z = -4x$, то y и z одинаковой четности, поэтому число $\dfrac{y-z}{2}$ – целое.

Комментарий. Доказано, что $4x + y + z = 0$ – 2 балла.

Получено равенство $(-1)\cdot A = \left(\dfrac{y-z}{2}\right)^2$, но не доказано, что выражение в скобках – целое число – 4 балла.

10.3. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^7 > y^6$ и $y^7 > x^6$. Докажите, что $x + y > 2$.

Решение. Докажем, что $x > 1$ и $y > 1$, из чего и будет следовать доказываемое утверждение. Правые части неравенств неотрицательны, поэтому оба числа x и y положительны. Перемножив данные неравенства и сократив на положительное число $x^6 y^6$, получим: $xy > 1$. Это означает, что по крайней мере одно из (положительных!) чисел x и y больше 1. Пусть, например, $x > 1$. Тогда из неравенства $y^7 > x^6$ следует, что $y^7 > 1$, то есть $y > 1$. Поэтому $x + y > 2$.

Комментарий. Доказано, что $xy > 1$ – 2 балла.
Доказано, что одно из чисел x и y больше 1 – еще 1 балл.
Рассмотрены не все случаи – не более 4 баллов.

Замечание. Другое доказательство того, что $x > 1$ и $y > 1$ можно получить, переписав неравенства в виде $x > y^{\frac{6}{7}}$ и $y > x^{\frac{6}{7}}$, и подставив x (y) из одного неравенства в другое (при этом в решении должна использоваться положительность чисел x и y).

10.4. В замке 16 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 4×4. В эти комнаты по одному человеку поселилось 16 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 16 человек казал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 16 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

Ответ. 12 рыцарей.

Решение. Заметим, что у каждого рыцаря хотя бы один из соседей должен быть лжецом. Покажем, что лжецов должно быть не менее 4 (так мы покажем, что рыцарей не больше 12). Пусть лжецов не больше 3, тогда найдется «вертикальный ряд» комнат, в которых живут только рыцари. Но тогда у каждого из этих рыцарей должен быть сосед лжец (и эти соседи разные). Поэтому лжецов не меньше 4.

На рисунке показано, как могли поселиться 12 рыцарей и 4 лжеца.

Р	Л	Р	Р
Р	Р	Р	Л
Л	Р	Р	Р
Р	Р	Л	Р

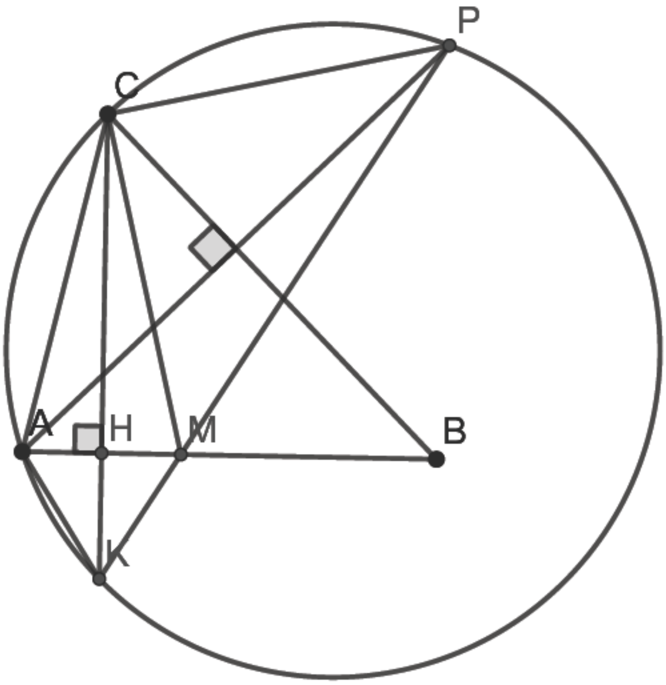
Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Пример расселения 4 лжецов и 12 рыцарей – 2 балла.
Доказано, что рыцарей не более 12 – 5 баллов.

Замечание 1. В примере лжецы не должны быть соседями.

Замечание 2. Оценку можно получить, заметив, что в трех комнатах – угловой и двух соседних к ней должен поселиться хотя бы один лжец.

10.5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Прямая CH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ACP, в точке K. Прямая KP пересекает отрезок AB в точке M. Докажите, что AC=CM.

Решение. В силу того, что CH – высота треугольника ACM, равенство $AC = CM$ равносильно тому, что CH – серединный перпендикуляр к отрезку AM, то есть тому, что KH – серединный перпендикуляр к отрезку AM. А это равносильно тому, что $AK = KM$, то есть равенству $\angle AKH = \angle MKH$, то есть $\angle AKC = \alpha = \angle CKP = \beta$. Но $\alpha = \angle CPA$ (вписанные, опираются на дугу AC), $\beta = \angle CAP$ (вписанные, опираются на дугу CP). Наконец, по условию точки A и P симметричны относительно прямой CB, значит, $AC = CP$, и тогда $\alpha = \angle CPA = \beta = \angle CAP$. Утверждение доказано.



Комментарий. Записано геометрическое утверждение, равносильное симметричности точек P и A – 1 балл.