Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2020/21 учебный год

10 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

Пусть $f(x,y)=kx+\frac{1}{y}$. Докажите, что если $f(a,b)=f(b,a)$ при $a\neq b$, то $f(ab,1)=0$.

Решение. По условию $ka+\frac{1}{b}=kb+\frac{1}{a}$. Преобразуем: $(a-b)\left(k+\frac{1}{ab}\right)=0$. Так как $a-b\neq 0$, то $k+\frac{1}{ab}=0$, $kab+1=0$, а это и означает, что $f(ab,1)=0$.

2. УСЛОВИЕ

Решите в натуральных числах уравнение

$$НОК(a;b)+НОД(a;b)=ab.$$

(НОД – наибольший общий делитель, НОК – наименьшее общее кратное).

Решение.

Пусть $НОД(a;b)=d$. Тогда $a=a_1d, b=b_1d$, где $НОД(a_1;b_1)=1$. Тогда $НОК(a;b)=a_1b_1d$. Отсюда $a_1b_1d+d=a_1db_1d$, или $a_1b_1+1=a_1b_1d$. Откуда $a_1b_1(d-1)=1$. То есть $a_1=b_1=1$ и $d=2$, значит, $a=b=2$.

Комментарий к решению. Другое решение можно получить, воспользовавшись равенством $НОК(a;b)\cdot НОД(a;b)=ab$.

Ответ: $a=b=2$.

3. УСЛОВИЕ

Все целые числа от 1 до $2n$ выписали в строку в случайном порядке. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит. Докажите, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две, дающие при делении на $2n$ одинаковый остаток.

Решение. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ – полученные суммы. Тогда $S_1 + S_2 + \ldots + S_{2n} = = 2(1+2+\ldots+2n) = 2 \cdot \frac{1+2n}{2} \cdot 2n = (1+2n) \cdot 2n$ делится на $2n$. Предположим, что остатки от деления на $2n$ чисел $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ все различны, т. е. дают набор $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$. Тогда число $S_1 + S_2 + \ldots + S_{2n}$ при делении на $2n$ даст такой же остаток, как сумма $0 + 1 + 2 + \ldots + 2n - 1 = (2n-1) \cdot n$, т. е. остаток n и, значит, на $2n$ не делится. Противоречие.

4. УСЛОВИЕ

В один из дней года оказалось, что каждый житель города сделал не более одного звонка по телефону. Докажите, что население города можно разбить не более чем на три группы так, чтобы жители, входящие в одну группу, не разговаривали в этот день между собой по телефону.

Доказательство. Проведём индукцию по n-числу жителей города. Если $n \le 2$, то нечего доказывать. Пусть $n \ge 3$. Пусть m – общее количество звонков в этот день. По условию $m \le n$. Поэтому найдётся житель *A*, разговаривавший не более чем с двумя жителями. По предположению индукции всех жителей, кроме *A*, можно разбить на три группы так, чтобы выполнялось условие задачи (допускается и пустая группа). Житель *A* заведомо не разговаривал с жителями одной из этих трёх групп. Его можно включить в эту группу, и требуемое утверждение сохранится.

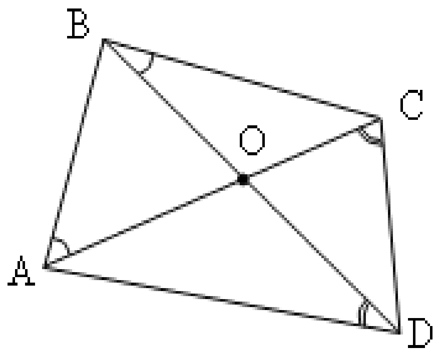
5. УСЛОВИЕ

В выпуклом четырёхугольнике ABCD $\angle CBD = \angle CAB$, $\angle ACD = \angle ADB$. Докажите, что из отрезков BC, AD, AC можно сложить прямоугольный треугольник.

Доказательство. См. рис. Треугольники AOD и ADC подобны: угол при вершине A у них общий и по условию равны углы ADO и ACD. Составим равенство отношений соответственных сторон в этих треугольниках:
$\frac{AO}{AD} = \frac{AD}{AC}$, откуда $AO \cdot AC = AD^2$.

Аналогично из подобия треугольников ABC и OBC получаем $\frac{CO}{BC} = \frac{BC}{AC}$, откуда $CO \cdot AC = BC^2$. Складывая полученные равенства $AD^2 = AO \cdot AC$ и $BC^2 = OC \cdot AC$, находим
$AD^2 + BC^2 = AO \cdot AC + OC \cdot AC = (AO + OC) \cdot AC = AC \cdot AC = AC^2$.

Обратная теорема Пифагора дает теперь требуемое: треугольник со сторонами AD, BC, AC – прямоугольный.



6. УСЛОВИЕ

На шахматной доске 8 х 8 расставили 64 шашки с номерами от 1 до 64. 64 ученика по очереди подходят к ней и переворачивают только те шашки, номера которых делятся нацело на порядковый номер очередного ученика. «Дамка» – это шашка, которая перевернута нечетное количество раз. Сколько «Дамок» будет на доске, после того как последний ученик отойдет от неё?

Решение. Очевидно, что каждая шашка переворачивается столько раз, сколько у её номера делителей. Поэтому «дамок» будет столько, сколько номеров от 1 до 64 имеют нечётное число делителей, а таким свойством обладают только полные квадраты. То есть номера «дамок», оставшихся на доске, будут 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 и 64, что составляет 8 штук.

Ответ: 8.

Критерии проверки задания 6.

При правильном ответе есть замечания к чёткости его изложения и обоснования. **5 баллов**.