Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2020– 2021 учебный год
Математика
11 класс

Требования к проверке работ:
1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;
2) Стандартная методика оценивания:

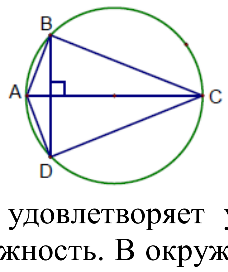
Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

В комментариях к отдельным задачам, в приведенных ответах и решениях к задачам олимпиады, указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Ответы и решения

11.1. Подряд выписаны числа 2^{2019} и 5^{2019}. Сколько всего выписано цифр?
Ответ: 2020.
Решение. Пусть число 2^{2019} содержит m цифр, а число 5^{2019} содержит n цифр. Тогда справедливы неравенства: $10^{m-1} < 2^{2019} < 10^m$, $10^{n-1} < 5^{2019} < 10^n$ (неравенства строгие, поскольку степень двойки или пятерки не равна степени десятки). Перемножив эти неравенства, получаем: $10^{m+n-2} < 10^{2019} < 10^{m+n}$. Отсюда следует, что показатель 2019 заключен между m+n-2 и m+n, поэтому 2019 = m+n-1 и m+n = 2020. Это означает, что всего выписано 2020 цифр.

11.2. В четырехугольнике диагонали перпендикулярны. В него можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Можно ли утверждать, что это квадрат?
Ответ. Нельзя.
Решение. Рассмотрим в окружности диаметр *AC* и перпендикулярную ему хорду *BD*, не проходящую через центр (см. рисунок).



Покажем, что четырехугольник *ABCD* удовлетворяет условию задачи. Для этого достаточно доказать, что в него можно вписать окружность. В окружности диаметр делит перпендикулярную ему хорду пополам, значит, в треугольнике *BAD* высота является медианой и этот треугольник

является равнобедренным: $AB=AD$. Аналогично, $CB=CD$. Так как суммы противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ равны, в него можно вписать окружность.
Комментарий.
7 баллов *− полное решение.*
3 балла *− верный пример фигуры, но не доказано одно из свойств (вписанность, описанность или перпендикулярность диагоналей).*
1 балл *− верная «картинка».*

11.3. Докажите, что если котангенсы углов треугольника образуют арифметическую прогрессию, то и квадраты сторон этого треугольника образуют арифметическую прогрессию.
Решение. Из теоремы косинусов: $a^2 – b^2 = ac \times \cos B – bc \times \cos A$.
Из теоремы о площади треугольника: $bc = 2S / \sin A$, $ac = 2S / \sin B$.
Из этих соотношений (и аналогичных им):
$b^2 – a^2 = 2S \times (\operatorname{ctg} A – \operatorname{ctg} B)$,
$c^2 – b^2 = 2S \times (\operatorname{ctg} B – \operatorname{ctg} C)$.
Так как котангенсы углов образуют арифметическую прогрессию, то $b^2 – a^2 = c^2 – b^2$.
Значит, квадраты сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию

11.4. Уравнение $(x + a)(x + b) = 9$ имеет корень $a + b$. Докажите, что $ab \le 1$.
Решение. Подставив данный корень $x = a+b$ в уравнение, получаем равенство $(a + b + a)(a + b + b) = (2a + b)(2b + a) = 9$.
Тогда $9 = 5ab + 2(a^2+b^2) > 5ab + 2\cdot 2ab = 9ab$, откуда $ab \le 1$. (Мы использовали неравенство $a^2 + b^2 > 2ab$, которое эквивалентно $(a - b)^2 > 0$.)
Комментарий. В решении применяется неравенство о средних для чисел, знак которых неизвестен, **_не более 3 баллов**.

11.5. Каждая клетка таблицы размером 7х8 (7 строк и 8 столбцов) покрашена в один из трех цветов: красный, желтый или зеленый. При этом в каждой строке красных клеток не меньше, чем желтых и не меньше, чем зеленых, а в каждом столбце желтых клеток не меньше, чем красных и не меньше, чем зеленых. Сколько зеленых клеток может быть в такой таблице?
Ответ: 8.
Решение. 1) В каждой строке таблицы красных клеток не меньше, чем желтых, следовательно, и во всей таблице красных клеток не меньше, чем желтых. В каждом столбце таблицы желтых клеток не меньше, чем красных, следовательно, и во всей таблице желтых клеток не меньше, чем красных. Таким образом, в таблице одинаковое количество красных и желтых клеток.

2) Предположим, что в каком-нибудь столбце желтых клеток больше, чем красных. Так как в каждом из остальных столбцов желтых клеток не меньше, чем красных, то тогда во всей таблице желтых клеток будет больше, чем красных, но это не так (см. 1). Значит, в каждом из восьми столбцов красных и желтых клеток поровну.

3) Так как в каждом столбце желтых клеток не меньше, чем зеленых, то исключаются случаи, когда в каждом столбце: а) 1 желтая, 1 красная, 5 зеленых клеток и б) 2 желтые, 2 красные, 3 зеленых клетки. Остается только случай, когда в каждом столбце 3 красных, 3 желтых и 1 зеленая клетка. Тогда всего в таблице — 8 зеленых клеток. Этот случай возможен. Например, см. таблицу.

з	з	ж	к	ж	к	ж	к
к	ж	з	з	к	ж	к	ж
ж	к	к	ж	з	з	ж	к
к	ж	ж	к	ж	к	з	з
ж	к	к	ж	к	ж	к	ж
к	ж	к	ж	к	ж	к	ж
ж	к	ж	к	ж	к	ж	к

Критерии проверки
7 баллов − приведено полное обоснованное решение.

6 баллов − приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности.
4 балла − доказано, что зеленых клеток может быть только 8, но пример не приведен.
2 балла − приведены только верный ответ и пример.
0 баллов − приведен только ответ.
0 баллов − задача не решена или решена неверно.

Интернет-ресурсы: http://www.problems.ru, https://olimpiada.ru.