11 класс

Задача 11.1 (7 баллов)

Найдите наименьшее целое n, удовлетворяющее неравенству $n \geq \frac{2020}{n}$.

Решение:

0 не подходит. При n>0, получаем $n^2 \geq 2020$, откуда $n \geq 45$.

При n<0, получаем $n^2 \leq 2020$, откуда $0 > n > -45$.Значит наименьшее целое n = -44

Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Получено n=45 (не учтены отрицательные числа)	3
Ответ без обоснования	0

Ответ: n = -44

Задача 11.2 (7 баллов)

Докажите, что при любых a и b уравнение $(a^2 - b^2)\, x^2 + 2\,(a^3 - b^3)\, x + (a^4 - b^4)=0$ имеет решение.

Решение:

Если $a^2 — b^2 \neq 0$, то данное уравнение квадратное с дискриминантом

$\frac{1}{4}D = (a^3 - b^3)^2 - (a^2 - b^2)\,(a^4 - b^4) = a^2b^4 - 2a^3b^3 + a^4b^2 = a^2b^2\,(a – b)^2 \geq 0$.

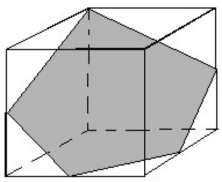
Если $a^2 - b^2 = 0$, то уравнение имеет корень x = 0.

Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Потерян случай $a^2 - b^2 = 0$	4
Ответ без обоснования	0

Задача 11.3 (7 баллов)

Можно ли куб рассечь плоскостью так, чтобы в сечении получился пятиугольник? Правильный пятиугольник? Если «да», построить сечение, если нет – доказать.

Решение:



а) На рисунке показано, что в сечении может получиться пятиугольник (в котором одна вершина совпадает с вершиной куба, а четыре другие являются серединами ребер)

б) Правильный пятиугольник получиться не может.

Легко доказать, что существуют такие 2 стороны пятиугольного сечения, которые лежат в противоположных гранях: если это не так для одной стороны, тогда остальные четыре лежат в смежных гранях куба(так как 5 сторон сечения лежат в 5-и из 6-ти граней куба), среди которых 2 пары противоположных для которых исходное утверждение верно.

2 стороны сечения, лежащие в противоположных гранях куба параллельны, так как плоскость сечения пересекает 2 параллельные плоскости граней, а в правильном пятиугольнике стороны параллельными быть не могут

Критерии	***баллы***
Полное решение, верно выполненный чертёж	7
Всё сделано, чертёж выполнен не точно (не параллельные прямые в параллельных плоскостях)	5
Верно выполнен один из пунктов	3
Ответ без обоснования	0

Задача 11.4 (7 баллов)

Дано 10 гирь. Оказалось, что суммарный вес любых четырех гирь больше, чем суммарный вес любых трех из оставшихся. Верно ли, что суммарный вес любых трех гирь больше, чем суммарный вес любых двух из оставшихся?

Решение:

Доказательство: Упорядочим веса наших гирь по неубыванию: $m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_{10}$. Тогда из условия, что суммарный вес любых четырех гирь больше, чем суммарный вес любых трёх из оставшихся, следует, что $m_1+m_2+m_3+m_4 > m_8+m_9+m_{10}$, т.е. суммарный вес четырёх самых лёгких больше суммарного веса трёх самых тяжёлых гирь. Но тогда в силу неравенства $m_4 \le m_8$ получаем, что $m_1+m_2+m_3 > m_9+m_{10}$, т.е. суммарный вес трёх самых лёгких больше суммарного веса двух самых тяжёлых гирь, значит, суммарный вес любых трёх гирь больше, чем суммарный вес любых двух из оставшихся, что и требовалось доказать.

Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Упорядочивание веса гирь	3
Ответ без обоснования	0

Ответ: верно.

Задача 11.5 (7 баллов)

Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{20}{x+y} \end{cases}$

Решение:

Рассмотрим два случая:

1) Пусть x+y>0, тогда x-y≥0; $\sqrt{(x+y)^2}=x+y$.

Освободившись от знаменателя, решим 2-е уравнение системы, $x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=20$. Пусть $\sqrt{x^2-y^2}=t$, $t \ge 0$, $t^2+t=20 \Rightarrow t=-5$, $t=4$. Найдём решения системы $\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x^2+y^2=34 \end{cases} \Rightarrow$ $2x^2=50$, $x=\pm 5$, $y=\pm 3$ (4 корня). Условиям удовлетворяют корни (5;-3) и (5;3).

2) x+y<0, тогда x-y<0; $\sqrt{(x+y)^2}=-(x+y)$. Решим второе уравнение системы $x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}=20$,

$\sqrt{x^2-y^2}=5, \sqrt{x^2-y^2}=-4 \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=25 \\ x^2+y^2=34 \end{cases} \Rightarrow 2x^2=59, x=\pm\dfrac{\sqrt{118}}{2}, y=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Условиям удовлетворяют корни: $\left(-\dfrac{\sqrt{118}}{2};\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{118}}{2};-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Верный ход решения с арифметической ошибкой	5
Рассмотрение одного случая	3

Ответ: (5;-3), (5;3), $\left(-\dfrac{\sqrt{118}}{2};\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{118}}{2};-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$