Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2020-2021 уч.год

11 класс

1. Существуют ли в пространстве четыре различные точки, такие, что у любых трех из них нет совпадающих значений координат, но любые две из них имеют одну совпадающую координату?
   Решение. Да, существуют, например $A(0,0,0), C(1,1,0), B_1(1,0,1), D_1(0,1,1)$. (Обозначения для точек выбраны исходя из простого способа построить пример – это вершины тетраэдра, вписанного в единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Задача имеет простую геометрическую интерпретацию – можно ли расположить четыре точки в пространстве так, чтобы любая тройка не лежала в одной плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей, а любые две лежали бы в такой плоскости.)
   Ответ. Существуют, имеется пример.

2. Найдите все вещественные корни уравнения

$$(x+1)^5+(x+1)^4(x-1)+(x+1)^3(x-1)^2+(x+1)^2(x-1)^3+(x+1)(x-1)^4+(x-1)^5=0$$

   Решение. Умножим обе части уравнения на $(x+1)-(x-1)$ (этот множитель равен 2). Воспользуемся формулой $a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$.

$$(x+1)^6-(x-1)^6=0$$
$$(x+1)^6=(x-1)^6$$

   Уравнение

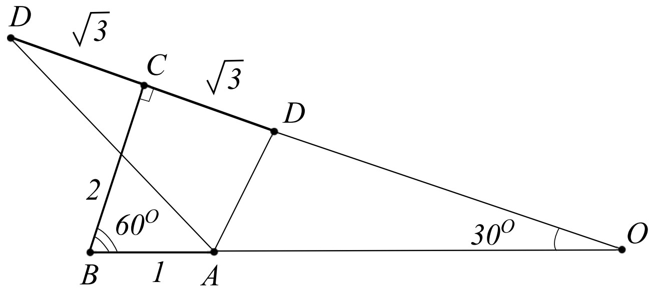
$$x+1=x-1$$

   решений не имеет. Уравнение

$$x+1=-(x-1)$$

   имеет решение $x=0$. Так как мы умножили уравнение на число 2, то посторонних корней не получили.
   Ответ. 0.

3. На плоскости находятся четыре точки A, B, C, D. Известно, что $AB=1$, $BC=2$, $CD=\sqrt{3}$, $\angle ABC=60^\circ$, $\angle BCD=90^\circ$. Найдите AD.
   Решение. Построим рисунок. Пусть прямая CD пересекает прямую AB в точке O

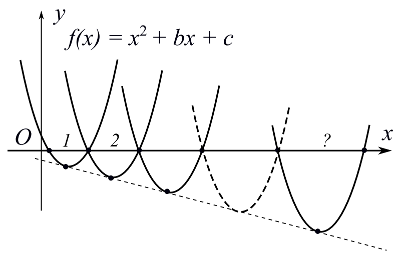


(по условию, эти прямые не параллельны). Возможно два положения точки D на

прямой CD – на отезке CO и вне этого отрезка. Треугольник BOC прямоугольный, угол при вершине O равен $30°$. Находим $AB = 4$, $OA = 3$, $OC = 2\sqrt{3}$. Для OD, с учетом $CD = \sqrt{3}$, получаем два возможных значения, $OD = \sqrt{3}$ или $OD = 3\sqrt{3}$. В треугольнике AOD известны две стороны и угол при вершине O. Воспользовавшись теоремой косинусов, найдем AD. Получаем два значения: $AD = 3$ или $AD = \sqrt{3}$.
Ответ. 3 и $\sqrt{3}$.

4. Сумма нескольких натуральных чисел равна 972. Чему равно наибольшее возможное значение их произведения?
Решение. Рассмотрим, на какие слагаемые необходимо разбить 972, чтобы получилось наибольшее возможное произведение. Среди слагаемых не должно быть единиц – в случае, если есть единица, мы можем добавить ее к любому из других слагаемых, и произведение увеличится. Любое слагаемое, большее 4, можно разбить на двойки и тройки. Т.е. если есть слагаемое p, то мы можем вычесть из него 2 или 3, и добавить эту двойку или тройку к набору. Произведение увеличится, т.к. $2 \cdot (p-2) > p, 3 \cdot (p-3) > p$. Возможное слагаемое 4 также можно заменить на две двойки. Итак, для достижения наибольшео возможного произведения числами, дающими в сумме 972, должны быть только 2 и 3. Далее, любые три двойки заменяются на две тройки, $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$. Поэтому двоек в наборе может быть только одна, две, или не быть совсем. Но если двоек одна или две, а остальные слагаемые – тройки, то вся сумма не будет делиться на 3. Данное нам число делится на 3. Значит, для достижения наибольшего возможного произведения это число должно быть представлено суммой троек. $972 : 3 = 324$.
Ответ. 3^{324}.

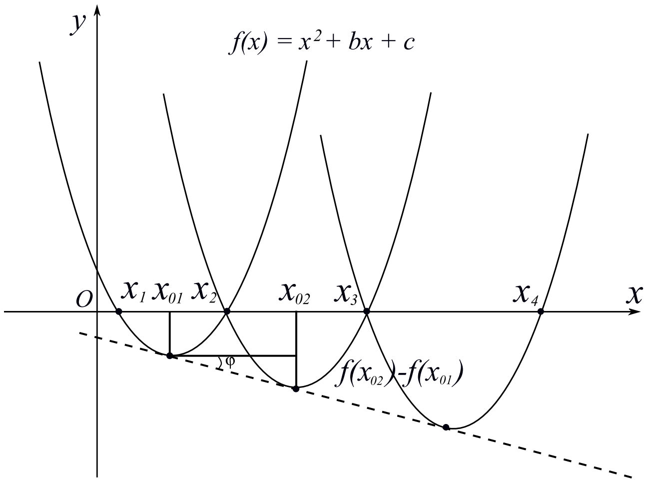
5. Параболы на рисунке получены сдвигом параболы $f(x) = x^2$ и размещены так, что точки их пересечения с осью OX соответственно попарно совпадают, а все вершины лежат на одной прямой. Всего парабол 2020. Длина отрезка оси OX, заключенного между корнями первой параболы, равна 1; длина отрезка, заключенного между корнями второй параболы, равна 2. Найдите длину отрезка оси OX, заключенного между корнями последней параболы.



Решение. Заметим, что расположение парабол может быть измнено сдвигом всего набора влево или вправо, (длины отрезков оси OX, заключенных между корнями парабол, при сдвиге не изменятся). Точка пересечения прямой, проведенной через вершины парабол, нам не потребуется. Длины отрезков задаются углом наклона проведенной прямой.
Напомним выражение для расстояния между корнями параболы. Пусть x_1 и x_2 – корни трехчлена $x^2 + bx + c$. Тогда

$$|x_2 - x_1| = \frac{-b+\sqrt{D}}{2} - \frac{-b-\sqrt{D}}{2} = \sqrt{D}$$

Здесь D – дискриминант этого трехчлена.



Пусть $x_0 = -\dfrac{b}{2}$ – абсцисса вершины параболы $f(x) = x^2 + bx + c$. Значение трехчлена в этой точке равно

$$f(x_0) = x_0^2 + bx_0 + c = \frac{b^2}{4} - b \cdot \frac{b}{2} + c = -\frac{D}{4} = -\frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$$

В нашей задаче необходимо вычислить тангенс угла наклона проведенной прямой (угла между положительным направлением оси OX и прямой). Обозначим этот угол φ. Пусть x_{01} и x_{02} – абсциссы вершин первой и второй парабол, x_1, x_2, x_3 – их корни в порядке возрастания (см. рисунок).

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_{02}) - f(x_{01})}{x_{02} - x_{01}}$$

У нас

$$x_{02} - x_{01} = x_{02} - x_2 + x_2 - x_{01} = \frac{1}{2}((x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)) = \frac{1}{2}(2 + 1) = \frac{3}{2}$$

$$f(x_{02}) - f(x_{01}) = -1 - (-\frac{1}{4}) = -\frac{3}{4}$$

Получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Теперь найдем, как связаны длины отрезка оси OX между корнями парабол с номерами $n+1$ и n, выразив эту длины через корни x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, значения в вершинах $f(x_{0n})$ и $f(x_{0n+1})$, дискриминанты D_n и D_{n+1}, найденный тангенс. Используем, что расстояние между абсциссами вершин равно сумме половин расстояний между корнями соседних парабол.

$$x_{0n+1} - x_{0n} = x_{0n+1} - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{0n} = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{2} + \frac{x_{n+1} - x_n}{2} = \frac{\sqrt{D_{n+1}}}{2} + \frac{\sqrt{D_n}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{2} = \frac{f(x_{0n+1}) - f(x_{0n})}{x_{0n+1} - x_{0n}} = \frac{-\dfrac{D_{n+1}}{4} + \dfrac{D_n}{4}}{\dfrac{\sqrt{D_{n+1}}}{2} + \dfrac{\sqrt{D_n}}{2}} =$$

$$= \frac{D_n - D_{n+1}}{2(\sqrt{D_{n+1}} + \sqrt{D_n})}$$

Из этого уравнения

$$\sqrt{D_{n+1}} - \sqrt{D_n} = 1$$

Отсюда

$$\sqrt{D_{n+1}} = \sqrt{D_n} + 1$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = (x_{n+1} - x_n) + 1$$

Т.е. длина отрезка между корнями каждой следующей параболы увеличивается на 1. Отсюда получаем, что длина отрезка оси OX, заключенного между корнями параболы с номером 2020, равна 2020.

Ответ. 2020.