Задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020-2021 учебный год
11 класс

Продолжительность олимпиады: 240 минут. Максимальное возможное количество баллов: 35

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
4-5	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача 1 (7 баллов).

Лабиринт представляет собой квадрат 8×8, в каждой клетке 1×1 которого нарисована одна из четырёх стрелок (вверх, вниз, вправо, влево). Верхняя сторона правой верхней клетки – выход из лабиринта. В левой нижней клетке находится фишка, которая каждым своим ходом перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелкой. После каждого хода стрелка в клетке, в которой только что была фишка, поворачивается на 90° по часовой стрелке. Если фишка должна сделать ход, выводящий ее за пределы квадрата 8×8, она остается на месте, а стрелка также поворачивается на 90° по часовой стрелке. Докажите, что рано или поздно фишка выйдет из лабиринта.

Решение

Занумеруем клетки, как показано на рисунке. Предположим, что фишка никогда не выйдет из лабиринта. Тогда на клетку с номером 1(см. рис.) фишка попадет конечное число раз (менее четырёх), так как в противном случае, когда стрелка покажет на выход, фишка из лабиринта уйдет.

8	7	6	5	4	3	2	1
9	8	7	6	5	4	3	2
10	9	8	7	6	5	4	3
11	10	9	8	7	6	5	4
12	11	10	9	8	7	6	5
13	12	11	10	9	8	7	6
14	13	12	11	10	9	8	7
15	14	13	12	11	10	9	8

Аналогично получаем, что после того, как фишка в последний раз побывает на поле 1, она конечное число раз побывает на полях с номером 2. Продолжая рассуждения, получаем, что после того, как фишка в последний раз побывала на полях с номерами k, $1 \le k \le 14$, она конечное число раз побывает на каждом поле с номером $k + 1$.

Значит, на каждом поле фишка побывает конечное число раз, что противоречит неограниченности числа ходов. Следовательно, фишка должна выйти из лабиринта.

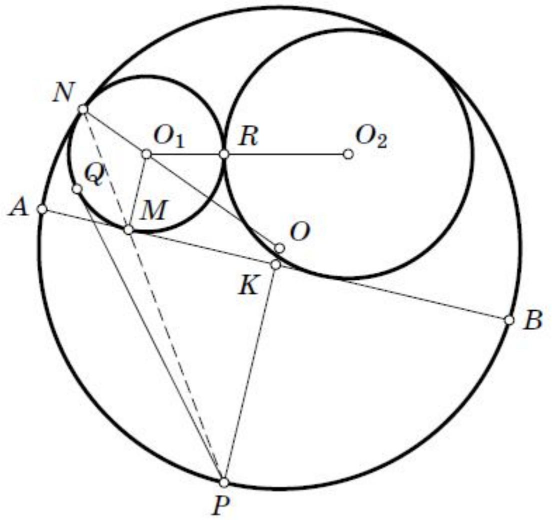
Задача 2 (7 баллов).
В прямоугольнике площадью 5 кв. единиц расположены девять прямоугольников, площадь каждого из которых равна единице. Докажите, что площадь общей части некоторых двух прямоугольников больше или равна 1/9.

Решение:
Предположим, что площадь общей части любых двух прямоугольников меньше 1/9. Покажем, что тогда они занимают площадь больше 5. Занумеруем прямоугольники: первый, второй, третий и т.д. Первый прямоугольник занимает площадь 1. Добавим второй прямоугольник. Площадь общей части первого и второго прямоугольников меньше 1/9, поэтому добавится площадь больше 8/9. Добавим третий прямоугольник. Площадь общей части третьего прямоугольника с первым и вторым меньше 2/9, поэтому добавится площадь больше 7/9, и т. д. В результате получим, что все девять прямоугольников занимают площадь больше

$$\mathbf{1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\ldots+\frac{1}{9}=5.}$$

Задача 3 (7 баллов).
Две окружности касаются друг друга внешним образом и третьей изнутри. Проводятся внешняя и внутренняя общие касательные к первым двум окружностям. Доказать, что внутренняя касательная делит пополам дугу, отсекаемую внешней касательной на третьей окружности.

Решение.



1 способ. Сделаем инверсию с центром в точке P и радиусом AP. Тогда третья окружность и прямая AB поменяются местами. Поэтому первая и вторая окружности перейдут каждая сама в себя. Следовательно, точка R, в которой они касаются, останется неподвижной. Таким образом, обе окружности касаются прямой PR в точке R. Это означает, что PR — общая касательная.
2 способ
Пусть O_1 и O_2 — центры первых двух окружностей, O — центр третьей окружности, A и B — точки пересечения третьей окружности с внешней касательной, P — середина дуги AB (точки P и O_1 лежат по разные стороны от прямой AB). Проведём из точки P касательную PQ к окружности с центром O_1. Докажем, что $PQ = PA$.
Пусть M и N — точки касания окружности с центром O_1 с прямой AB и с третьей окружностью. Треугольники NO_1M и NOP равнобедренные, причём угол NO_1M = углу NOP, поэтому прямая MN проходит через точку P. Следовательно, $PQ^2 = PM \cdot PN = PM \cdot (PM + MN) = PM^2 + AM \cdot MB$.
Пусть K — середина отрезка AB. Тогда $PM^2 = PK^2 + KM^2$ и $AM \cdot MB = AK^2 - KM^2$, поэтому $PQ^2 = PK^2 + AK^2 = AP^2$.

Таким образом, $PO_1^2 = PQ^2 + QO_1^2 = PA^2 + r_1^2$, где r_1 — радиус окружности с центром O_1. Аналогично доказывается, что $PO_2^2 = PQ^2 + QO_2^2 = PA^2 + r_2^2$, где r_2 — радиус окружности с центром O_2.

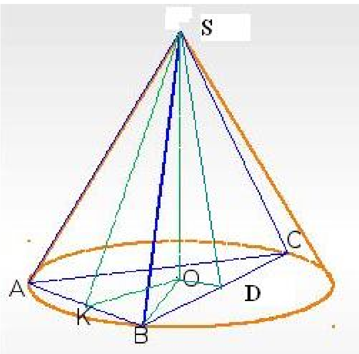
Пусть R — точка касания первых двух окружностей (она лежит на отрезке O_1O_2). Тогда $PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = RO_1^2 - RO_2^2$. Из этого следует, что $PR \perp O_1O_2$, а значит, PR — общая внешняя касательная к первым двум окружностям. (Тот факт, что множество точек X, для которых $XO_1^2 - XO_2^2 = const$, представляет собой прямую, перпендикулярную прямой O_1O_2, можно доказать методом координат или из теоремы Пифагора.)

Задача 4 (7 баллов).

Развёртка боковой поверхности конуса представляет собой сектор с углом в 120°; в конус вписана треугольная пирамида, углы основания которой составляют арифметическую прогрессию с разностью 15°. Определить угол наклона к плоскости основания наименьшей из боковых граней.

***Ответ*:** arccos $\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

***Решение*.**



Пусть l — длина образующей конуса. Длина окружности основания равна длине дуги развёртки, поэтому радиус окружности основания равен $l/3$. Пусть углы треугольника, лежащего в основании пирамиды, равны x−15°, x, xа+15°. Учитывая, что сумма углов любого треугольника равна 180°, получаем, что x=60°. Поэтому основание пирамиды— треугольник ABC с углами 45°, 60°, 75°.

Пусть BC — меньшая сторона, O — центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда уголBOC=2·45°=90°, поэтому треугольник BOC — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $l/3$. Значит, по теореме Пифагора, $BC=l\sqrt{2}/3$.

Пусть D — середина отрезка BC, S — вершина конуса.

Тогда $OD = DB = \dfrac{l}{3\sqrt{2}}$ и

SD $= \sqrt{SB^2 - DB^2} = \sqrt{l^2 - \dfrac{l^2}{18}} = \dfrac{l\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$

Если x— искомый угол, то cos x = $\dfrac{OD}{SD} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$

x=arcos $\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

Задача 5 (7 баллов)

В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральные сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков. С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 947 очков?

Ответ: 16.

Решение.
Наибольшее количество очков, которое может набрать игрок одним броском — 60 (утроение 20), далее идут: 57 очков (утроение 19) и 54 очка (утроение 18). Попадание во все остальные сектора и зоны дают меньше 54 очков. Значит, за 15 бросков он наберет не более 900 очков, а тогда для того, чтобы набрать 947 очков понадобится не менее 16 бросков.
Покажем, что игрок может набрать 947 очков за 16 бросков. Предположим, что он сделал 14 бросков на 60 очков (итого 840), один бросок в зону утроения сектора 19 (57 очко) и один бросок в центральный сектор 50 очков. Тогда в сумме он наберет 840 + 57 + 50 = 947 очков.