Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2020-2021 уч.год

6 класс

Решения и ответы

1. Имеются два ведра, одно 7 литров, второе 3 литра. Имеется кран и раковина, они позволяют набрать любое количество воды и, при необходимости, вылить ее. Напишите последовательность действий, как, наливая и выливая воду из ведер, можно отмерить ровно 1 литр воды. Продолжите дальше и покажите, как получить 2, 4, 5, 6 литров воды. Вспомогательной посуды нет.
   Решение.
   1 литр получаем, два раза последовательно выливая воду из ведра 7 литров в ведро 3 литра. В большом ведре останется 1 литр.
   2 литра получаем, три раза последовательно выливая воду из ведра 3 литра в ведро 7 литров, наполнив его. В малом ведре останется 2 литра.
   4 литра получаем, вылив часть воды из ведра 7 литров в ведро 3 литра, наполнив его. В большом ведре останется 4 литра.
   5 литров получаем так. Берем два литра воды (мы уже умеем получать 2 литра, см. выше), переливаем их в большое ведро, добавляем 3 литра. Пять литров находятся в большом ведре.
   5 литров можно получить вторым способом. Получаем в большом ведре 1 литр (см. выше). Переливаем этот литр в малое ведро. Наполняем большое ведро и отливаем из него воду в трехлитровое, в котором находится 1 литр. В большом ведре останется 5 литров. Если воспользоваться этим способом, то после получения 5 литров можно получить 2 литра, перелив лишнюю воду из большого ведра в пустое трехлитровое.
   6 литров получаем, наполняя большое ведро два раза по 3 литра.

2. В классе учится 28 человек. В один день каждый принес по три фломастера, красный, зеленый, синий. Могут ли ученики класса обменяться фломастерами так, чтобы у каждого оказалось три фломастера одного цвета?
   Решение 1. Предположим, что такой обмен возможен. Возьмем всех учеников, получивших по три красных фломастера. Других учеников, получивших красные фломастеры, по нашему предположению, нет. Отсюда число всех красных фломастеров делится на три. Число красных фломастеров, по условию задачи, равно 28, поэтому мы получили противоречие.
   Решение 2. Будем выдавать фломастеры по три. Сначала раздадим 27 красных, их получат 9 учеников. Затем раздадим 27 зеленых и 27 синих фломастеров, их получат еще 18 учеников. Останется один ученик и три фломастера разных цветов.
   Ответ. Ученики не могут обменяться фломастерами так, чтобы каждый получил три фломастера одного цвета.

3. Перед телевизором сидят три подружки-спорщицы. Про каждую из них известно, что она или всегда во всем права, или всегда во всем ошибается. Первая сказала: ”Ни одна из нас не видела этот фильм”. Вторая сказала: ”Я видела этот фильм, а вы обе не видели”. Третья сказала: ”Я видела этот фильм”. Определите, сколько среди этих подружек таких, которые всегда правы, если известно, что какая-то из них сказала все верно, а какая-то ошиблась.
   Решение. Если первая подружка права, то высказывани второй и третьей неверны. Если вторая подружка права, то высказывания первой и третьей неверны. Если

третья подружка права, то высказывания второй и третьей неверны. Две подружки не могут быть правы одновременно. Так как хотя бы одна из подружек высказала верное утверждение, то верных утверждений ровно одно.
Ответ. Среди подружек ровно одна такая, которая всегда права.

4. Докажите, что при любых целых n произведение $(n+3)(n+7)(n+11)$ делится на 3.
Решение. Задача решается перебором остатков.
Пусть $n = 3k$. В этом случае получаем

$$(n+3)(n+7)(n+11) = (3k+3)(3k+7)(3k+11) = 3(k+1)(3k+7)(3k+11)$$

Это выражение делится на 3.
Пусть $n = 3k+1$. В этом случае получаем

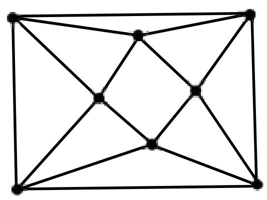
$$(n+3)(n+7)(n+11) = (3k+4)(3k+8)(3k+12) = 3(3k+4)(3k+8)(k+4)$$

Это выражение делится на 3.
Пусть $n = 3k+2$. В этом случае получаем

$$(n+3)(n+7)(n+11) = (3k+5)(3k+9)(3k+13) = 3(3k+5)(k+3)(3k+13)$$

Это выражение делится на 3.

5. Нарисуйте восемь точек и соедините их отрезками так, чтобы отрезки не пересекались, и каждая точка была бы концом ровно четырех отрезков.
Решение. Достаточно привести рисунок. Возможная идея состоит в том, чтобы по-



местить один четырехугольник в другой.

6. Существуют ли три различных натуральных (*целых положительных*) числа, таких, что сумма любых двух из них является простым числом?
Решение. Число 2 не может быть суммой трех целых положительных чисел. Остальные простые числа – нечетные. Пусть три числа, о которых спрашивается в условии задачи, существуют. Сумма первого и второго числа нечетна, значит, одно из этих чисел четно, а второе нечетно. Сумма второго и третьего числа нечетна, значит, одно из этих чисел четно, а второе нечетно. Поэтому первое и третье число или оба одновременно нечетные, или оба одновременно четные. Поэтому сумма первого и третьего числа четна, и не может быть простым числом. Значит, требуемых трех чисел не существует.
Ответ. Таких чисел не существует.