

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 7 КЛАСС

Максимальное число баллов за одну задачу — 7, максимальное общее число баллов — 35

Продолжительность — 4 часа.

В каждой задаче требуется предъявить развернутое решение.

7.1. Маша придумала число A , а Паша – число B . Оказалось, что $A + B = 2020$, а дробь $\frac{A}{B}$ меньше $\frac{1}{4}$.
Какое наибольшее значение может принимать дробь $\frac{A}{B}$?

Ответ: $\frac{403}{1617}$

Решение 1: Сумма числителя и знаменателя равна 2020. Значит, чем больше числитель дроби, тем меньше её знаменатель – и тем больше сама дробь (так как и числитель и знаменатель – положительные числа). $\frac{404}{1616}$ в точности равна $\frac{1}{4}$, а $\frac{403}{1617}$ меньше $\frac{1}{4}$.

Решение 2: Обозначим дробь $\frac{a}{b}$. Так как $a + b = 2020$, то $a = 2020 - b$.

По условию,

$$\frac{a}{b} = \frac{2020 - b}{b} = \frac{2020}{b} - 1 < \frac{1}{4},$$

откуда $\frac{2020}{b} < \frac{5}{4}$. Так как 2020 делится на 5, представим вторую дробь как дробь с числителем 2020:

$$\frac{2020}{b} < \frac{2020}{1616},$$

Откуда наибольшее $b = 1617$.

Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное верное решение;

частично верное решение – не более 5 баллов;

только ответ – 0 баллов.

7.2. За столом по кругу сидят 7 аборигенов: рыцари, лжецы и зануды (хотя бы один представитель каждого племени за столом есть). Рыцарь всегда говорит правду, лжец – всегда лжет. Зануда лжет, если рядом с ним сидит хотя бы один рыцарь, а в остальных случаях говорит что угодно.

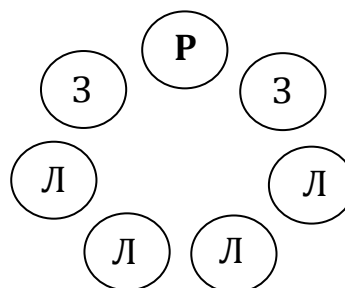
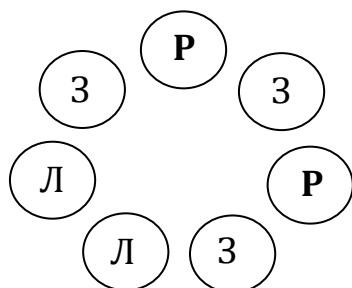
Сколько за столом могло оказаться рыцарей, если на вопрос «Кто твои соседи?» каждый ответил «Оба моих соседа – зануды»? Приведите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

Ответ: 1 или 2.

Решение: Два рыцаря рядом сидеть не могут, значит, рыцарей не более трех.

Если за столом 3 рыцаря, то зануд хотя бы 4, но в этом случае за столом нет лжецов. Противоречие.

Далее приведем примеры рассадки 1 и 2 рыцарей за столом:



Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное обоснованное решение;

4 балла – найден только один верный ответ при наличии обоснования;

только ответ – 0 баллов.

7.3. Известно, что и КРУГ, и КУБ являются кубами некоторых чисел. Найдите все возможные значения чисел КРУГ и КУБ. Перечислите их все и объясните, почему других нет. (Одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, разные цифры – разными буквами.)

Примечание: 8 и 1000 являются кубами, так как $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$, а $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$.

Ответ: 1728 и 125.

Решение: Заметим, что в словах КУБ и КРУГ две повторяющиеся цифры – К и У.

Выпишем всевозможные трехзначные числа, являющиеся кубами некоторых чисел:

$5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$ ($4^3 = 64$ – двузначное; $10^3 = 1000$ – четырехзначное). Заметим, что 343 нам не подходит ($K \neq Б$).

Выпишем возможные варианты букв К и У:

У	1	2
К	2 или 5	1 или 7

Выпишем всевозможные четырехзначные числа, являющиеся кубами некоторых чисел:

$10^3 = 1000$, $11^3 = 1331$, $12^3=1728$, $13^3 = 2197$, $14^3 = 2744$, $15^3 = 3375$, $16^3 = 4096$, $17^3 = 4913$, $18^3 = 5832$, $19^3= 6859$, $20^3 = 8000$, $21^3 = 9261$ ($9^3=729$ – трехзначное; $22^3 = 10648$ – пятизначное).

Заметим, что 1000, 1331, 2744, 3375 и 8000 нам не подходят, т.к. К, Р, У и Г – различные цифры.

Среди оставшихся вариантов выпишем всевозможные значения для букв К и У:

У	1	2	3	5	6	9
К	4	1	5	6	9	2 или 4

Заметим, что К и У в числах КРУГ и КУБ совпадают только при $У = 2$, $К = 1$. Значит, существует единственное решение: КРУГ = 1728, КУБ = 125.

Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное верное обоснование;

4-5 баллов – ответ найден верно, но решение недостаточно обоснованно;

3 балла – идея рассмотреть одинаковые буквы У и К, но решение не закончено или с ошибками;

Только ответ – 0 баллов.

7.4. Бригада рабочих за два дня должна вырезать n скульптур для ледового городка. В первый день они вырезали 11 скульптур, причем каждый рабочий выполнил одинаковую часть работы. Во второй день на работу вышли всего 7 человек, т.к. часть рабочих перевели на другой объект. При этом на каждого рабочего пришлось в три раза больше работы, чем в первый день, поэтому ледовый городок был готов в срок. Сколько ледовых скульптур могло быть в городке? Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

Ответ: 12, 14, 18, 22 или 32.

Решение: Обозначим за k количество рабочих, приступивших к выполнению работы в первый день. Объем работы, выполненный каждым рабочим в первый день, равен $\frac{11}{k}$, тогда во второй день, т.к. каждый выполнил в три раза больше, равен $\frac{33}{k}$. С другой стороны, во второй день 7 рабочих вырезали $(n - 11)$ скульптур, а значит, объем выполненной работы каждым рабочим равен $\frac{n-11}{7}$. Составим уравнение:

$$\frac{n-11}{7} = \frac{33}{k}, \text{ откуда } k(n - 11) = 231.$$

Таким образом, k должен быть делителем числа 231: 1, 3, 7, 11, 21, 33, 77 или 231.

Варианты 1, 3 и 7 нам не подходят, т.к. по условию задачи известно, что часть рабочих перевели на другой объект, т.е. $k > 7$. В остальных случаях,

Число рабочих k	11	21	33	77	231
$n - 11$	21	11	7	3	1
Количество скульптур n	32	22	18	14	12

Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное верное обоснование;

верно и обосновано найдено только 4 решения – 5 баллов; 3 решения – 4 балла; 2 решения – 3 балла; 1 решение – 2 балла;

в том или ином виде найдено уравнение $k(n - 11) = 231$, но решение не закончено или с ошибками – 2 балла;

только ответ – 0 баллов.

7.5. По кругу расставили числа от 1 до 20. Число покрасим в синий цвет, если оно без остатка делится на соседнее слева число. В противном случае — покрасим его в красный цвет. Какое наибольшее количество синих чисел могло оказаться в круге?

Решение.

Оценка. Очевидно, что не могут быть синими числа, сосед слева у которых больше или равен 11. То есть синими не могут быть больше, чем 10 чисел.

Пример. В качестве примера засчитывается, как любая верная расстановка, так и корректный алгоритм. Пример корректного алгоритма.

- 1) выпишем число 20
- 2) если последнее выписанное число = $2k$, то запишем слева от него число k , иначе запишем слева от него самое большое незадействованное число.
- 3) пока есть незадействованные числа – повторяем шаг 2.

Критерии.

Есть оценка и верный пример — 7 баллов

Только пример – 4 балла

Только оценка – 3 балла.