7 класс – 2020

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в ***комментариях*** к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

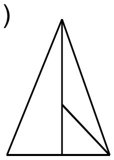
7.1. Существуют ли такие числа a и b, для которых все четыре числа $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$, $a:b$ разные и каждое из этих чисел равно какому-то из чисел 0,9 , 3,6 , 1,6 , 3,9 .

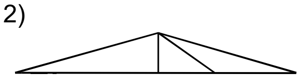
Ответ: да, $a = 2{,}4$ и $b = 1{,}5$.

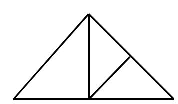
Комментарии. Подходящая пара – единственная. Если она указана верно – 7 баллов.

7.2. Докажите, что любой равнобедренный треугольник можно разбить (без остатка) на два прямоугольных треугольника и один равнобедренный треугольник.

Решение. Возможны три случая: 1) исходный треугольник – остроугольный, 2) исходный треугольник – тупоугольный, 3) исходный треугольник – прямоугольный.

1) 

2) 

3) 

Комментарии. Верный пример разбиения только для случая 1) или только для случая 2) – 4 балла.
Верный пример разбиения только для двух случаев – 6 баллов.

7.3. Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c, x, y всегда хотя бы одно из чисел x/(ab+ac) и y/(ac+bc) будет меньше, чем (x+y)/(ab+bc) .

Решение. Если x/(ab+ac) ≤ y/(ac+bc), то x/(ab+ac) ≤ (x+y)/(ab+bc+2ac) < (x+y)/(ab+bc). Если же y/(ac+bc) ≤ x/(ab+ac), то y/(ac+bc) ≤ (x+y)/(ab+bc+2ac) < (x+y)/(ab+bc).

7.4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n , для которых числа 2n−3 и 3n−2 имеют не равный 1 общий делитель.

Решение. Достаточно заметить, что при любом целом положительном k при n = 5k-1 числа 2n-3 = 10k-5 и 3n-2 = 15k-5 делятся на 5 .

7.5. Докажите, что из любого множества из 15 положительных целых чисел, каждое из которых не превосходит 2020, всегда можно выбрать два непересекающихся подмножества с одинаковыми суммами входящих в эти подмножества чисел.

Решение. Сумма 15 чисел не больше, чем $15 \cdot 2020 = 30300$. Из 15 чисел можно получить 2^{15} различных наборов. Так как $2^{15} = 32768 > 30300$, то какие-то две суммы будут одинаковыми. Если в этих двух наборах (подмножествах) есть одинаковые элементы, то вычтем их в каждом наборе. При этом в каждом наборе останется хотя бы одно число, а суммы в наборах уменьшаться на одну величину и, следовательно, останутся равными.

Комментарии. Доказано, что какие-то две суммы будут равными, но с этих суммах не убраны равные слагаемые – 6 баллов.