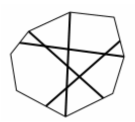
Всероссийская олимпиада школьников 2020/2021 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
7 класс

Общее время выполнения работы – 3 часа 00 мин (180 минут).
Максимальная сумма баллов 35.

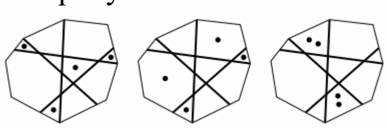
Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.
При наличии дополнительных критериев решение школьника оценивается в соответствии с ними.

Задание 7.1
Через двор проходят четыре пересекающиеся тропинки (см. рисунок). Посадите четыре яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь. Приведите два разных варианта.



Количество баллов 7
Ответ:
См. рисунки



Дополнительные критерии проверки
- “7” – любые два правильных варианта
- “4” – один правильный вариант
- “0” – задача не решена или решена неверно

Задание 7.2
Можно ли из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составить одно двузначное и одно трехзначное число так, чтобы второе делилось на первое? Каждая цифра должна быть использована ровно один раз.
Количество баллов 7
Ответ:
Можно.
Решение
Легко проверить, что 532 делится на 14, а 215 делится на 43.

Для нахождения этих пар можно применить перебор вариантов. Для уменьшения числа вариантов применяем свойства делимости из которых в частности следует что: если двухзначное число оканчивается на 5 то второе число делится на него не может; если первое число четное, то и второе должно быть четным; если первое число делится на 9, то второе на него не делится.

Дополнительные критерии проверки

- “7” – любые два правильных варианта
- “4” – один правильный вариант
- “0” – задача не решена или решена неверно

Задание 7.3

У Васи и Пети по 55 гирь весом 1, 2, … , 55 кг. Они по очереди подкладывают свои гири каждый на свою чашу двухчашечных весов. Первым ходит Вася. Петя выигрывает, если разность масс гирь на чашах окажется равной 50 кг. Сможет ли он этого добиться?

Количество баллов 7

Ответ:

Да.

Решение

Первый способ

Петя может просто повторять ходы Васи. В какой-то момент Вася вынужден будет сходить гирей 50 кг и немедленно проиграет.

Второй способ

Петя откладывает в сторону свою 50-килограммовую гирю и ходит как угодно остальными гирями. В конце игры Вася выложит все гири, а Петя все, кроме 50-килограммовой. Следовательно, чаша Васи будет весить на 50 кг тяжелее.

Задание 7.4

Определить четырёхзначное число, если:

1) деление этого числа на однозначное число производится по следующей схеме:	× × × × × × × ××× × × × ×	**2)** деление этого же числа на другое однозначное число производится по такой схеме:	× × × × × × ××× × × × × × × ×

Количество баллов 7

Ответ:

1014 (при делении на 2 и на 3), 1035 (при делении на 5 и на 9) или 1512 (при делении на 3 и на 7).

Решение

Вторая схема деления может быть только такой:

1 × × ×   ×
×   ×××
1 ×
×
× ×
× ×

Если данное число равно $\overline{1abc}$, то согласно второй схеме деления $10 + a - x = 1$. Число x не превосходит 9 и является произведением двух натуральных чисел, меньших 10. Кроме того, согласно первой схеме деления число $10 + a$ является произведением двух натуральных чисел, отличных от 1. Для a остаются три возможности: $a = 0$, 5 или 6. В первой схеме производится деление, соответственно, на 2 или 5, на 3 или 5, на 4. Во второй — на 3 или 9, 2 или 7, 3 или 5. Далее, $10b + c$ делится на число, на которое производится деление в первой схеме. Перебирая возникающие в результате варианты, находим подходящие четырёхзначные числа.

Задание 7.5

Вдоль прямолинейного участка границы установлено 15 столбов. Около каждого столба поймали несколько близоруких шпионов. Каждый из них честно сказал, сколько других шпионов он видел. Но любой шпион видел только тех, кто находился около его столба и около ближайших соседних столбов. Можно ли по этим данным восстановить численность шпионов, пойманных около каждого столба?

Количество баллов 7

Ответ:

Можно.

Решение

Занумеруем столбы числами от 1 до 15 слева направо. Из опроса всех шпионов, пойманных у второго столба, узнаем суммарную численность шпионов у первых трех столбов, а из опроса шпионов, пойманных у первого столба, узнаем численность шпионов, пойманных у первого и второго столбов. Вычитая из первого результата второй, узнаем сколько шпионов поймали у третьего столба.

Далее, опросив шпионов, пойманных у пятого и четвертого столбов, и зная количество шпионов, пойманных у третьего столба, найдем количество шпионов, пойманных у шестого столба. Аналогично определяется, сколько шпионов поймано у столбов с номерами 9, 12 и 15. Теперь, опросив шпионов у столба с номером 15, узнаем, сколько шпионов поймано у столба с номером 14. Дальнейшие опросы можно проводить “с конца” различными способами. Например, достаточно опросить шпионов у столбов с номерами 14, 12, 10, 9, 7, 6, 4, 3, устанавливая тем самым, сколько шпионов поймано у столбов с номерами 13, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 2 и 1 соответственно.

Дополнительные критерии проверки

- “7” – приведено полное обоснованное решение
- “4-6” – верно описан алгоритм, позволяющий ответить на вопрос задачи, но не написано, как именно находить требуемые количества
- “2-3” – присутствует верная идея решения, но она не доведена до конца