## 7-й класс

**7.1** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник встретил тузенцев А и Б. Тузенец А произнес фразу: «По крайней мере один из нас (А и Б) – лжец». Можно ли сказать, кем является А и кем является Б (рыцарем или лжецом).

*Решение:* Если бы А был лжецом, то его фраза должна быть ложью, но оказалась правдой. Значит, А − рыцарь, и его фраза − это правда. Следовательно, Б − лжец.

**7.2** Найдите все решения числового ребуса

$$AX+YX=YPA$$

(разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым − одинаковые).

*Решение*. Ясно, что $Y = 1$ и А − четная цифра. А не может быть меньше 8, иначе результат не будет трехзначным числом. Стало быть, $A = 8$.

$$\begin{array}{r} 8X \\ +\; 1X \\ \hline 1P8 \end{array}$$

Видим, что при сложении должен произойти переход 1 из разряда единиц в разряд десятков. Значит, $X = 9$. Получаем ответ: единственное решение $89 + 19 = 108$.

**7.3** 17 школьников сдавали тест. Каждый из них набрал целое число баллов, у всех разное. Каждый школьник набрал меньше, чем любые два в сумме. Могло ли случиться так, что Петя набрал 15 баллов?

*Решение*. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{17}$ − баллы, набранные школьниками. При переходе в этом ряду чисел от $a_2$ к $a_{17}$ мы сделаем 15 шагов. На каждом шаге число увеличивается по меньшей мере на 1. Поэтому $a_{17} \ge a_2 + 15$.

По условию $a_1 + a_2 > a_{17}$ (каждый набрал меньше, чем любые два в сумме). Из этого заключаем, что $a_1 + a_2 > a_2 + 15$, т.е. $a_1 > 15$.

Итак, каждый, в т.ч. и Петя, набрал больше 15 баллов.

**7.4** Ваня написал в тетрадке числа 1,2,3,…,13. Пять (каких-то) из них он умножил на 3, остальные на 7 и все произведения сложил. Могло ли у него в результате получиться 433?

*Решение*. Попытаемся разобраться в ситуации. Пусть А − сумма тех пяти чисел, которые надо умножить на 3, В − сумма остальных восьми чисел (их надо умножить на 7). Рассмотрим сумму после умножения: $3A + 7B$. Запишем ее так (с учетом того, что сумма всех тринадцати чисел равна 91):

$$3(A + B) + 4B = 3 \cdot 91 + 4B = 273 + 4B.$$

Нам хотелось бы, чтобы эта сумма была равна 433:

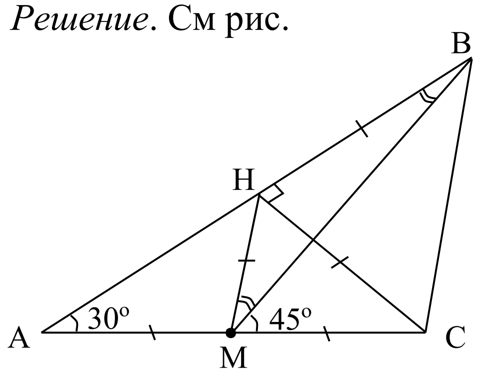
$$273 + 4B = 433, \quad 4B = 160, \quad B = 40.$$

Подберем восемь чисел с суммой 40. Сумма $1+2+...+7+12=40$.
Сумма остальных пяти чисел: $8+9+10+11+13=51$.
Можно проверить:
$3(8+9+10+11+13)+7(1+2+...+7+12)=3\cdot 51+7\cdot 40=153+280=433$.

**Ответ:** могло.

**7.5** В треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $\angle BAC=30^{o}$, $\angle BMC=45^{o}$. Найдите угол BAC.

*Решение*. См рис.




CH − высота

$\Delta AMB: \angle AMB=135^{o} \Rightarrow \angle ABM=15^{o}$

Пусть $AC=2b$. Тогда $AM=MC=b$, $CH=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\cdot 2b=b$ (как катет против угла $30^{o}$ в $\Delta AHC$).

$MH=b$ (как медиана из вершины прямого угла в $\Delta AHC$).

Т.о. $\Delta MHC$ − равносторонний, поэтому

$\angle HMC=60^{o} \Rightarrow \angle HMB=\angle HMC-\angle BMC=60^{o}-45^{o}=15^{o}$.

Значит, $\Delta MHB$ − равнобедренный: $BH=MH=b$. Получаем: $\Delta BHC$ − равнобедренный прямоугольный, $\angle ABC=\angle HBC=45^{o}$.