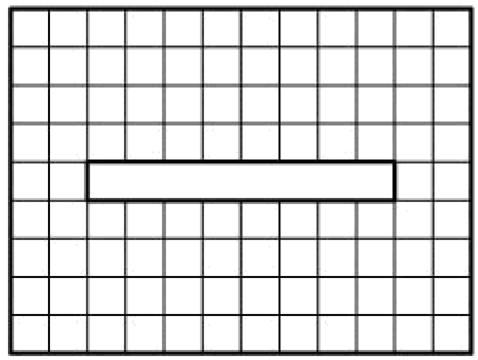
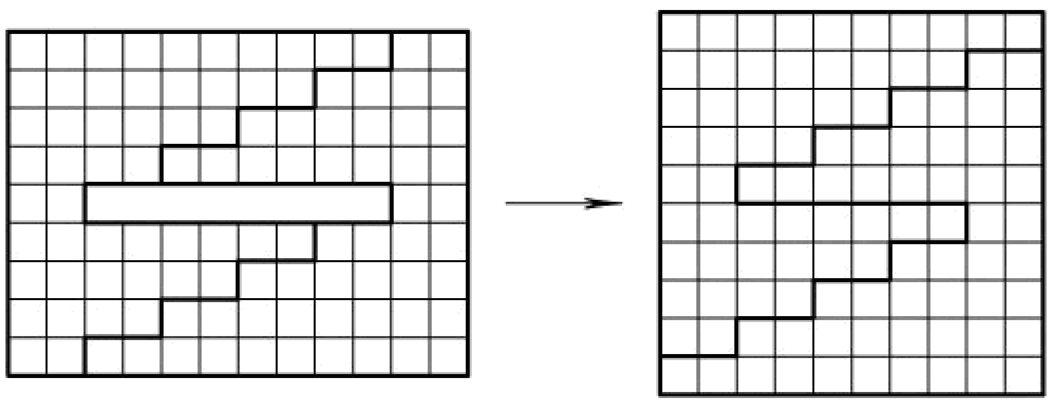
7 класс. Решения и критерии

1. Изображённую на рисунке фигуру (прямоугольник 9×12 с дыркой 1×8 в центре) разрежьте на две равные части, из которых можно сложить квадрат.



Решение.



Критерии. Разрезание, для которого читателю неочевидно, как сложить квадрат (но квадрат складывается) – 5 баллов.

2. Гена зашифровал ряд из пяти целых чисел: Б, АН, АХ, НО, ФФ. Здесь разные цифры обозначены разными буквами, одинаковые цифры – одинаковыми буквами, запятая отделяет соседние числа (и в «НО» второй символ – буква «О»). Гена забыл зашифрованные числа, но помнит, что разность любых двух соседних чисел равна одному и тому же числу (из правого числа вычитается левое число). Можно ли однозначно установить, какие числа зашифровал Гена?

Ответ: 5, 12, 19, 26, 33.

Решение. Все эти числа можно определить, если знать первое число и разность d двух соседних. У второго и третьего чисел совпадают первые цифры, то есть они находятся в одном десятке, и их разность, равная d, не превосходит 9. А значит, прибавив d к первому (однозначному) числу, мы можем получить только двузначное число, начинающееся на 1, то есть А $=$ 1. Аналогично, Н $= 2$, Ф $= 3$, так как в этих случаях тоже к двузначному числу прибавляется число, не превосходящее 9, и первая цифра увеличивается на 1. Получаем запись: Б, 12, 1Х, 2О, 33.

Заметим, что 1Х–12 $=$ 2О–1Х $=$ 33–2О $= d$. Сложив эти равенства, получим: $33 - 12 = 3d$, откуда $d = 7$. Мы восстановили последнее число и разность. Дальше легко восстановить запись: 5, 12, 19, 26, 33.

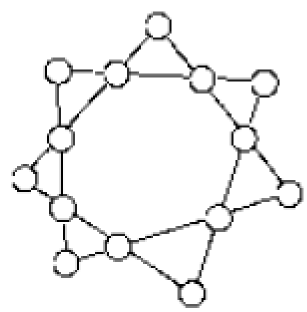
Критерии. За нахождение цифр А, Н, Ф по 1 баллу за каждую цифру. За нахождение разности d – 3 балла, за окончательный ответ 1 балл, баллы суммируются. Если верный ответ найден подбором и не доказана его единственность – 5 баллов. При этом если обоснована запись: Б, 12, 1Х, 2О, 33, а дальше использован подбор – 6 баллов.

3. Коля говорит, что две шоколадки дороже пяти жвачек, Саша – что три шоколадки дороже восьми жвачек. Когда это проверили, прав оказался только один из них. Верно ли, что 7 шоколадок дороже, чем 19 жвачек? Не забудьте обосновать свой ответ.

Решение. Пусть цена шоколадки c, а цена жвачки g. Коля говорит, что $2c > 5g$ или $6c > 15g$, а Саша говорит, что $3c > 8g$ или $6c > 16g$. Если бы Саша был прав, то был бы прав и Коля – это противоречит условию. Значит, прав Коля, но не Саша, и на деле $3c \leqslant 8g$ или $21c \leqslant 56g < 57g$, то есть $21c < 57g$ и $7c < 19g$. Ответ: неверно.

Критерий. Только ответ – 0 баллов. Только частные случаи с конкретными ценами шоколадки и жвачки – 1 балл. При доказательстве используются соотношения типа «$\approx$» (приближенно равно) – не более 3 баллов.

4. Есть набор из целых чисел: две двойки, три тройки, четыре четверки, пять пятерок (всего 14 чисел). Эти числа расставили в кружки звезды на рисунке



Могло ли получиться так, что все суммы чисел вдоль каждого отрезка (на котором 4 кружка) равны между собой?

Ответ: нет

Решение. Сумма чисел во всех кружках равна $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 54$. Поскольку каждый кружок расположен на двух отрезках, сумма всех указанных в условии сумм равна $54 \cdot 2 = 108$. Если бы все эти суммы были равны между собой, сумма всех сумм должна была бы делиться на 7, но 108 не делится на 7.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только некоторые частные попытки расставить числа, возможно с какими-то наблюдениями – не более 2 баллов. Только вычислена сумма всех чисел – 3 балла.

5. Имеется квадрат 6×6, все клетки которого белые. За один ход разрешается изменить цвет обеих клеток в любой доминошке (прямоугольнике из двух клеток) на противоположный. За какое наименьшее число ходов можно получить квадрат с шахматной раскраской? Не забудьте объяснить, почему меньшего количества ходов не хватит.

Ответ. 18 ходов.

Решение. Заметим, что в шахматной раскраске квадрата 6×6 присутствует 18 черных клеток. При этом никакие две из них не могут стать черными за один ход, потому что не покрываются одной доминошкой. Следовательно, потребуется минимум 18 ходов (хотя бы одному на клетку). Сделать это за 18 ходов можно, например, так: разбить доску на 9 квадратов 2×2, а в каждом квадрате перекрасить сначала нижнюю доминошку, а затем – правую. Есть и другие алгоритмы.

Критерии. Только ответ 1 балл, правильно составлен алгоритм – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.