Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап 2020–2021 уч. г. Решения задач.

7 класс

7.1. Средний рост 11 футболистов команды равен 182 см. Во время матча судья удалил с поля одного футболиста, и средний рост оставшихся стал 181 см. Каков рост удаленного футболиста?
Ответ: 192 см. **Решение**. Пусть S – сумма, которая получится, если сложить для 10 оставшихся футболистов их рост. Тогда $\frac{S}{10}=181$ и $\frac{S+x}{11}=182$, где x – рост удаленного футболиста. Отсюда $S=1810$ и $x=182\cdot 11-S=2002-1810=192$.

7.2. Петя выписал на доске подряд все натуральные числа от 1 до n и подсчитал количество всех написанных цифр. Оно оказалось равным 777. Чему равно n?
Ответ. 295. **Решение**. Поскольку выписано всего 777 цифр, то n должно быть трехзначным числом: действительно, в случае двузначного n было бы выписано не более $9+2\cdot 90=189$ цифр, а в случае четырехзначного (или более) – было бы выписано более $9+2\cdot 90+3\cdot 900=2889$ цифр. Пусть k – количество выписанных трехзначных чисел ($k=n-99$). Тогда общее количество выписанных цифр равно $9+2\cdot 90+3\cdot k=777$. Отсюда $k=196$, а $n=k+99=295$.

7.3. В мешочке для игры лото 90 бочонков с числами от 1 до 90. Какое наименьшее количество бочонков нужно вынуть наугад из мешочка, чтобы гарантированно получить бочонок с числом, делящимся на 3 или на 5 (или на 3 и 5 одновременно)?
Ответ: 49. **Решение**. Будем называть *желательными* числа, делящиеся на 3 или на 5. Количество чисел от 1 до 90, делящихся на 3, равно 30 (=90:3), а делящихся на 5 – равно 18 (=90:5). Если сложить 30+18=48, то при этом будут учтены по одному разу все числа, делящиеся только на 3 и только на 5, и дважды будут учтены числа, делящиеся одновременно на 3 и на 5, т.е. делящиеся на 15. Количество таких (дважды учтенных чисел) равно 6=90:15. Поэтому, вычитая 48 – 6, получим 42 желательных числа. Остальные 48 нежелательных чисел (=90 – 42) могли оказаться на вынутых сначала бочонках, но тогда 49-й вынутый бочонок гарантированно будет желательным.

7.4. Сколько существует шестизначных натуральных чисел, у каждого из которых соседние цифры имеют разную чётность?
Ответ: 28125. **Решение.** Если первая (старшая) цифра чётная, то её можно выбрать одним из четырёх способов (2, 4, 6, 8), а все последующие – одним из пяти (возможные кандидаты для второй, четвёртой и шестой цифры – это 1, 3, 5, 7, 9, а для третей и пятой – 0, 2, 4, 6, 8). В итоге по правилу произведения будем иметь всего $4\cdot 5^5=12500$ чисел с первой четной цифрой. Аналогично, в случае нечётной первой цифры получим $5\cdot 5^5=15625$ чисел. Итак, общее количество искомых чисел равно 28125. ***Замечание.*** Можно получить тот же результат, если сразу воспользоваться правилом произведения. Первую цифру можно выбрать девятью способами (взяв любую цифру, кроме 0), после этого вторую цифру можно выбрать пятью способами (взяв любую цифру, у которой четность отлична от четности первой цифры), и так далее: следующие цифры можно выбирать пятью способами (причем количество способов не зависит от предыдущих цифр). Поэтому по правилу произведения получаем результат: $9\cdot 5^5$.

7.5. Коля начертил n отрезков и отметил красным цветом все точки их пересечения. Могло ли оказаться так, что на любом отрезке ровно три красных точки, если **а)** $n=11$; **б)** $n=100$?
Ответ: **а)** могло; **б)** могло. **Решение.** **а)** См. пример на рисунке. Набор отрезков в этом примере состоит из двух частей: в левой части 6 отрезков, в правой – 5. **б)** Если расположить 20 копий правой части примера из пункта **а),** получим искомое расположение 100 отрезков.