Муниципальный тур ВСОШ олимпиады по математике
(2020/2021 уч. год)

Ответы и решения заданий

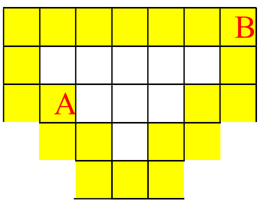
Общие критерии оценивания каждой задачи:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задания для 7 класса

Задача №1

Миша предложил Юле передвинуть фишку из клетки A в клетку B по закрашенным клеточкам. За один шаг можно передвинуть фишку в соседнюю по стороне или по углу клетку. Чтобы было интереснее, Миша положил 30 конфет в призовой фонд, но сказал, что будет забирать по 2 конфеты за каждый горизонтальный или вертикальный ход и по 3 конфеты за каждый диагональный ход. Оставшиеся конфеты Юля получает в награду. Какое максимальное количество конфет может выиграть Юля?



Ответ: 14.

Решение. От A до B можно добраться через верх или через низ. Если идти через верх, то первые 2 хода диагональные (диагональный ход выгоднее, чем 2 горизонтальных), а следующие 5 горизонтальные. Миша заберёт $2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 16$ конфет, и Юля выиграет 14. Если же идти через низ, то первые 5 ходов диагональные, а последний вертикальный. В этом варианте Миша заберёт $5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 17$ конфет, Юля выиграет 13 конфет. Получаем, что первый вариант выгоднее и выигрыш составит 14 конфет.

Задача №2

Найти все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении числа на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

Ответ: 18, 45, 90 и 99.

Решение: По условию сумма цифр числа a и числа $9a$ одна и та же. Поэтому согласно признаку делимости на 9 число a делится на 9. Двузначные числа, делящиеся на 9, следующие: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 и 99. Из них числа 27, 36, 54, 63, 72 и 81 не обладают требуемым свойством; в этом можно убедиться, умножая их, соответственно, на 7, 8, 7, 3, 4 и 9. Оставшиеся числа требуемым свойством обладают.

Задача №3

Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в этой гирлянде, если всего лампочек 50?

Ответ: 33 лампочки

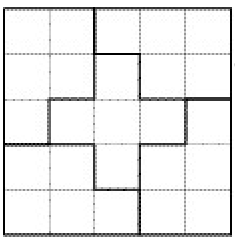
Решение

Подсчитаем, какое наименьшее количество синих лампочек может быть в гирлянде. Можно считать, что первая лампочка – красная. Поскольку рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя, то три красных лампочки не могут идти подряд. Следовательно, среди каждых трех последовательно идущих лампочек хотя бы одна лампочка должна быть синей. Тогда среди первых 48 лампочек синих будет не меньше, чем 48 : 3 = 16. Обе лампочки с номерами 49 и 50 оказаться красными не могут. Итак, синих лампочек в гирлянде должно быть не менее 17. Такой случай возможен: если лампочки с номерами 2, 5, 8, 11, ..., 50 – синие, а остальные – красные, то в гирлянде – 33 красные лампочки.

Задача №4

На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5 клеток. Его требуется разбить на 5 частей одинаковой площади, проводя отрезки внутри квадрата только по линиям сетки. Может ли оказаться так, что суммарная длина проведенных отрезков не превосходит 16 клеток?

Ответ: да, может



Решение. Один из возможных примеров приведен на рисунке (суммарная длина проведенных отрезков равна 16).

Задача №5

В поезде 18 одинаковых вагонов. В некоторых вагонах свободна ровно половина мест, в некоторых других – ровно треть мест, а в остальных заняты все места. При этом во всём поезде свободна ровно одна девятая всех мест. В скольких вагонах все места заняты?

Ответ: в 13 вагонах.

Решение. Примем за единицу количество пассажиров в каждом вагоне. Далее можно рассуждать по-разному.
Первый способ. Так как в поезде свободна ровно одна девятая часть всех мест, то это равнозначно тому, что полностью свободны два вагона. Число 2 единственным образом раскладывается в сумму третьих частей и половин: $2 = 3 \cdot 1/3 + 2 \cdot 1/2$. Это означает, что свободные места есть в пяти вагонах, поэтому в13 вагонах все места заняты.
Второй способ. Пусть в x вагонах свободна половина мест, а в y вагонах – треть мест. Тогда $x \cdot 1/2 + y \cdot 1/3 = 18 \cdot 1/9$. Избавившись от знаменателей дробей, получим: $3x + 2y = 12$. Так как x и y – натуральные числа, то перебором убеждаемся, что $x = 2$, $y = 3$. Тогда искомое количество вагонов: $18 – 2 – 3 = 13$.

Примечание: *Найти натуральные решения уравнения $3x + 2y = 12$ можно также из соображений делимости, если выразить одну переменную через другую.*

***Критерии** проверки.*

«+» Приведено любое полное и обоснованное решение
«±» Приведено верное рассуждение, но допущена вычислительная ошибка
«±» Приведено верное в целом рассуждение и получен верный ответ, но не объяснена единственность решения уравнения или единственность разложения 2 в линейную комбинацию дробей 1/2 и 1/3.
«-\+ » Верно составлено уравнение, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют
« -/+» Приведен только верный ответ
«–» Задача не решена или решена неверно