Муниципальный этап Российской олимпиады школьников по математике

2020-21 учебного года

7 класс (*время решения – 4 часа*)

1. Можно ли расставить в вершинах и на серединах сторон треугольника шесть различных целых чисел так, чтобы каждое число, стоящее в вершине, было равно сумме чисел в двух других вершинах и числа, стоящего на середине противоположной стороны?

Ответ: Да, можно.

Решение: Например: A(0), B(3), C(1), A_1(-4), B_1(2), C_1(-2). Здесь A_1 – середина стороны BC, B_1 – середина стороны AC, C_1 – середина стороны AB.

Критерии проверки: Верный пример с проверкой – 7 баллов, без проверки – 6 баллов, в остальных случаях – 0 баллов.

2. Дима, Саша, Коля, Глеб выступили на олимпиаде и заняли первые четыре места. Через год их одноклассникам удалось вспомнить лишь три факта: «Дима занял первое место или Глеб – третье», «Глеб занял второе место или Коля – первое», «Саша занял третье место или Дима – второе». Кто выступил лучше – Дима или Саша? (В каждом из трех высказываний может быть истинна одна часть, а другая ложна, или истинны обе части).

Ответ: Дима.

Решение. Если Дима занял первое место, то из последнего высказывания следует, что Саша занял третье место, значит, Дима выступил лучше. Если же неверно, что Дима на первом месте, то Глеб обязательно на третьем. Тогда из второго высказывания получаем, что Коля занял первое место. Саша не мог быть на третьем, поэтому из третьего высказывания получаем, что Дима на втором. Значит, Саша на четвертом, и в этом случае опять Дима выступил лучше.

Критерии проверки: Если в решении упущен какой-то из случаев (критерий перебора может быть другой), то не более 2-х баллов.

Верный ответ со всеми необходимыми объяснениями – 7 баллов.

3. В классе больше 20, но меньше 30 человек, дни рождения у всех разные. Петя сказал: «Тех, кто старше меня, в классе в два раза больше тех, кто младше меня». Катя сказала: «Тех, кто старше меня, в классе в три раза меньше тех, кто младше меня». Сколько человек в классе, если Петя и Катя правы?

*Ответ:*25.

Решение: Из слов Пети ясно, что без него в классе кратное 3 число учеников (2 части + 1 часть). То есть вместе с ним в классе может быть 22, 25 или 28 человек. Аналогично, из слов Кати понятно, что без нее в классе кратное 4 число учеников. Подходят числа 21, 25, 29. Раз оба высказывания верны, число, удовлетворяющее обоим условием, это число 25.

Критерии проверки: Верный ответ с проверкой – 1 балл.
Если решение – перебором и упущен без пояснений какой-то из случаев от 21 до 29, то 1 балл.
Верный ответ со всеми необходимыми объяснениями – 7 баллов.

4. Три трехзначных числа, в записи которых участвуют все цифры, кроме нуля, дают в сумме 1665. В каждом числе первую цифру поменяли местами с последней цифрой. Получили три новых трехзначных числа. Чему равна сумма новых чисел?

Решение: Сумма последних цифр трех исходных чисел равна 5, 15 или 25. Но 5 и 25 исключаются, так как не представимы как суммы трех различных цифр (от 1 до 9), значит остается 15. Значит, сумма средних цифр также равна 15, и сумма первых цифр – 15. После чего ясно, что сделав перестановку цифр, мы снова получим три числа, сумма которых равна 1665.
Напоследок предъявим тройку чисел (одну из возможных), которая удовлетворяет условиям задачи: 159, 672, 834.
Ответ: 1665.

Критерии проверки: Верный ответ со всеми необходимыми объяснениями – 7 баллов. Предъявлять тройку чисел, удовлетворяющих условиям задачи, не обязательно. Их существование следует из условия задачи.

5. Петя разрезал квадрат 8x8 по границам клеток на части одинакового периметра. Оказалось, что не все части равны. Какое наибольшее возможное число частей он мог получить?

Ответ: 21.

Решение: Пусть S – наименьшая площадь у фигур, полученных Петей.

Если S=1, то эта фигура – квадрат 1x1 и его периметр равен 4. Тогда все Петины фигуры имеют периметр 4, то есть они все квадраты 1x1. Но это значит, что все фигуры равны, что противоречит условию.

Аналогично, если S= 2, то эта фигура – прямоугольник 2x1 и его периметр равен 6. Тогда все Петины фигуры имеют периметр 6, то есть они все прямоугольники 2х1. Но это значит, что все фигуры равны, что противоречит условию.

Если S = 3, то всего фигур не более 64/3, значит не более 21. Пример на 21 фигуру легко построить – из 10 прямоугольников 2х3, составленных из двух уголков из трех клеток, и одного квадрата 2х2. И у уголка, и у квадрата периметр равен 8.

Наконец, если S ≥ 4, то фигур не более 64/4 = 16.

Критерии проверки: Верный ответ со всеми необходимыми объяснениями – 7 баллов.

Если доказано, что фигур не более 21, но не приведен пример разрезания – 5 баллов.

Если приведен пример на разрезание на 21 часть, но не доказано, что больше нельзя – 2 балла.