МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 2020-2021 уч. год
7 класс
(3 часа)

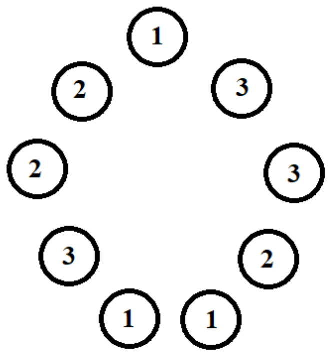
1. Математик бегает в $\frac{5}{3}$ раза быстрее физика и в $\frac{7}{5}$ раза быстрее химика. Математик, физик и химик стартовали одновременно и побежали по беговой дорожке к финишу. Математик финишировал на 24 секунды раньше физика. На сколько секунд математик опередил химика?
Ответ: 14,4.
Решение. Пусть физик пробегает всю дистанцию за $5x$ секунд, тогда математик пробегает эту же дистанцию в $\frac{5}{3}$ раза быстрее, то есть за $3x$ секунд. Получаем, что $2x=24$, то есть $x=12$. Следовательно, математик пробежал всю дистанцию за 36 секунд, а физик – за 60 секунд. Пусть химик пробегает всю дистанцию за $7y$ секунд, тогда математик пробегает эту же дистанцию в $\frac{7}{5}$ раза быстрее, то есть за $5y$ секунд. Получаем, что $5y=36$, то есть $y=7{,}2$. Значит, химик пробегает всю дистанцию за $7{,}2\times7=50{,}4$ секунды. Следовательно, математик опередит химика на $50{,}4 - 36 = 14{,}4$ секунды.
Критерии. *Если приведено неверное решение – 0 баллов.*
Только ответ без объяснения – 1 балл.
Найден время, за которое пробегает всю дистанцию математик – 1 балл.
Найден время, за которое пробегает всю дистанцию физик – 1 балл.
Найден время, за которое пробегает всю дистанцию химик – 1 балл.
Любое верное решение – 7 баллов.

2. Чебурашка взял несколько натуральных чисел и перемножил их. Произведение оказалось равным 1792. Какие числа перемножал Чебурашка, если самое маленькое из этих чисел было в два раза меньше самого большого? Ответ обосновать.
Ответ: 4, 7, 8, 8 или 8, 14, 16.
Решение. Разложим число 1792 на простые множители: $1792=2^8\times7$. Семь не входит ни в меньший, ни в больший множители, так как иначе они будут отличаться в семь или более раз. Значит, меньший и больший множители – соседние степени двойки. Наибольшая степень двойки 8 (иначе самый большой множитель меньше 7) или 16 (иначе $32\times16=2^9$). В первом случае перемножали числа 4, 7, 8, 8; во втором случае 8, 14, 16. При больших степенях двойки меньший и больший множители не будут отличаться в два раза.
Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Получен только один верный ответ – 2 балла.
Получены два верных ответа, но отсутствует объяснение, почему нет других – 4 балла.
Если верное решение – 7 баллов.

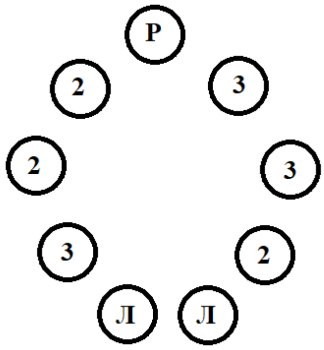
3. Сколько целых чисел, больших 100 и меньших 400, которые имеют в своей записи по крайней мере одну цифру 3?
Ответ: 138.

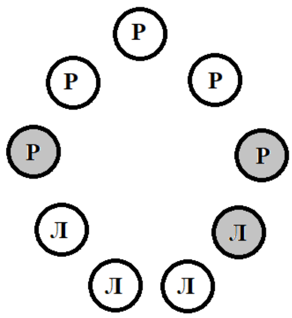
Решение. Рассмотрим числа от 100 до 399, которые не имеют в своей записи цифры 3. Для цифр единиц и десятков выбор цифры из 9 вариантов, для цифры сотен две возможности 1 и 2. $2\times9\times9=162$.
Исключаем число 100. $2\times9\times9-1=161$.
Всего чисел от 101 до 399 имеется $399-100=299$.
Следовательно, искомых чисел $299-161=138$.
Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Только верный ответ – 1 балл.
Если верный ход рассуждений, но есть вычислительная ошибка на последнем шаге – 5 баллов.
Если верное решение – 7 баллов.

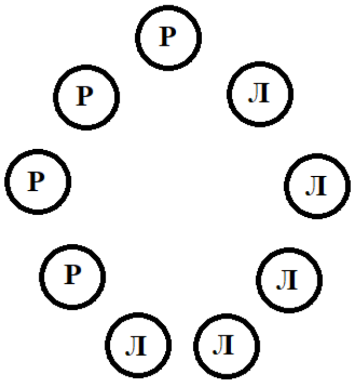
4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 9 аборигенов, среди которых были как рыцари, так и лжецы, встали в хоровод, и каждый произнёс: «Два человека, стоящие напротив меня – лжецы». Напротив аборигена стоят четвёртый абориген от него по часовой стрелке и четвёртый от него против часовой стрелки. Сколько среди 9 аборигенов рыцарей? Привести все ответы и доказать, что других нет.
Ответ: 3 или 4 рыцаря.
Решение. Разобьём всех аборигенов на три группы (см. рис, аборигены из одной группы имеют одинаковые номера).

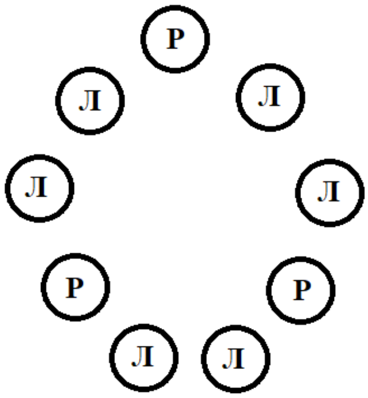


В каждой такой тройке не может быть трёх лжецов (так как тогда один из лжецов говорит правду) и не может быть трёх рыцарей (так как тогда один из рыцарей лжёт). Значит, рыцарей не менее трёх и не более шести. Рассмотрим какого-нибудь рыцаря. Повернём наш круг таким образом, чтобы он оказался в первой тройке в отдельной вершине. Тогда эта тройка заполняется единственным образом (см. рис.). Значит, всего рыцарей не более пяти. Чтобы их было ровно пять, две другие тройки заполняются тоже единственным образом (см. рис.). Но тогда получаем противоречие для выделенной цветом тройки. Значит, всего рыцарей не более четырёх. Примеры на 3 и 4 рыцаря (см. рис.).



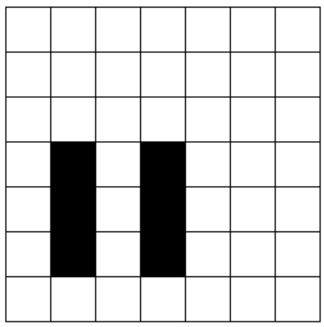






Критерии.
Неверное решение – 0 баллов.
Приведён пример для 3 рыцарей – 1 балл.
Приведён пример для 4 рыцарей – 1 балл.
Доказано, что меньше 3 рыцарей быть не может – 1 балл.
Доказано, что больше 6 рыцарей быть не может – 1 балл.
Доказано, что 6 рыцарей быть не может – 1 балл.
Доказано, что 5 рыцарей быть не может – 1 балл.
Верное решение – 7 баллов.

5. Какое наибольшее число не бьющих друг друга слонов можно поставить на доске с двумя «горами» (см. рис, «горы» закрашены тёмным цветом)? Слон бьёт на любое число клеток по диагонали, но не может бить сквозь «гору» или другого слона.

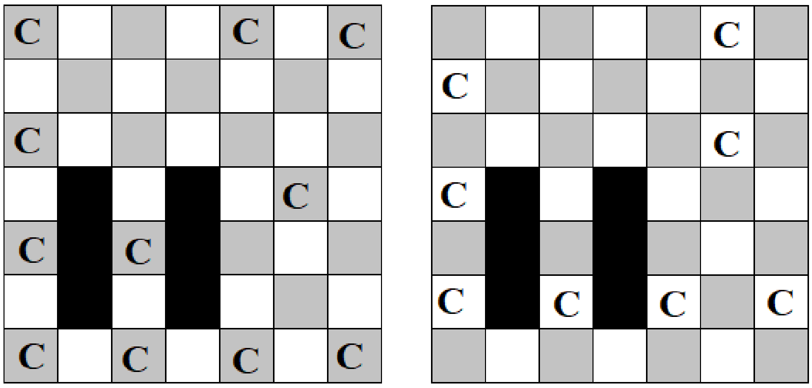


Ответ: 19 слонов.
Решение. *Оценка.* Раскрасим сначала доску в шахматном порядке (см. рис.).
Затем разобьём все чёрные клетки на 11 областей (см. рис.).
И все белые клетки на 8 областей (см. рис.).

4		3		7		10
	3		7		10	
3		7		10		9
					9	
2		6		9		8
					8	
1		5		8		11

	4		6		8	
3		4		6		8
	3		4		6	
2		3		4		6
					4	
1		5		7		4
	1		5		7	

В каждой такой области может находиться не более одного слона (иначе слоны бьют друг друга). Значит, больше 11+8=19 слонов поставить нельзя.
Пример для 11 чернопольных и 8 белопольных слонов – см. рисунки.



Критерии.

Если есть только верный ответ без примера – 1 балл.
Есть верный ответ и приведён пример – 3 балла.
Есть только оценка – 4 балла.
Верное решение – 7 баллов.