

Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2020 г.)

8 класс

1. Может ли сумма цифр квадрата натурального числа быть равна 2021?

Решение: Квадрат целого числа (как и сумма его цифр) даёт при делении на 3 остаток 0 или 1. А число 2021 при делении на 3 даёт остаток 2.

Ответ: нет.

2. При записи десятичной дроби школьник все её цифры написал правильно, а вот запятую поставил так, что в результате была написана дробь, которая меньше нужной на 18,189. Какую десятичную дробь должен был записать школьник?

Решение: Так как в результате ошибки число уменьшилось, то запятая была сдвинута влево. При этом число уменьшилось в 10 раз. Пусть получилось число x , тогда искомое число – это $10x$. По условию: $10x - x = 18,189$, значит, $x = 2,021$, $10x = 20,21$.

Ответ: 20,21.

3. Известно, что

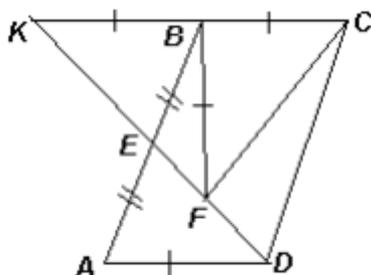
$$\frac{1}{3a} + \frac{2}{3b} = \frac{3}{a+2b}$$

Докажите, что $a = b$.

Доказательство. Преобразуем данное равенство, умножив обе его части на $3ab(a+2b)$. Получим: $b(a+2b) + 2a(a+2b) = 9ab$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых равенство примет вид: $2b^2 + 2a^2 - 4ab = 0$. Следовательно, $(a-b)^2 = 0$, откуда $a = b$. Что и требовалось доказать.

4. Точка E – середина стороны AB параллелограмма ABCD. На отрезке DE нашлась такая точка F, что $AD = BF$. Найдите величину угла CFD.

Решение: Продолжим DE до пересечения с прямой BC в точке K (см. рисунок). Так как $BK \parallel AD$, то $\angle KBE = \angle DAE$. Кроме того, $\angle KEB = \angle DEA$ и $AE = BE$, значит, равны треугольники BKE и ADE . Тогда $BK = AD = BC$.



Таким образом, в треугольнике CFK медиана FB равна половине стороны, к которой она проведена, поэтому этот треугольник – прямоугольный с прямым углом F. Следовательно, и угол CFD – прямой.

Ответ: 90° .

5. Взяли 2021 произвольное натуральное число и расположили их по кругу. Докажите, что всегда найдутся два соседних числа, сумма которых - четное число.

Решение: Сумма 2 чисел будет чётной, если они оба чётные или оба нечётные. Сумма 2 чисел будет нечётной, если одно из них будет чётное, а другое – нечётное. Допустим, что сумма любых 2 соседних чисел нечётна, тогда чётные и нечётные числа должны чередоваться. Значит, общее число чисел будет чётным, а по условию чисел 2021, – нечётное количество. Значит, допущение сделано неверно, и на самом деле найдутся 2 числа, сумма которых будет чётна.