МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 8 КЛАСС

Максимальное число баллов за одну задачу — 7, максимальное общее число баллов — 35

Продолжительность — 4 часа.

В каждой задаче требуется предъявить развернутое решение.

8.1. На доске записаны три натуральных числа. Таня посчитала произведение чисел, записанных на доске, и получила число, оканчивающееся на 1010. А Ваня посчитал их сумму и получил число 9999. Не ошибся ли Ваня?

Ответ: ошибся.

Решение: Если сумма трех целых чисел равна 9999, то либо они все нечетны (и тогда их произведение оканчивается на нечетную цифру), либо два из них четны, а одно нечетно (тогда их произведение делится на 4, а число, оканчивающееся

на 10, не делится на 4).

Критерии:

7 баллов – полное верное решение;

3-5 баллов – частично верное продвижение в решении.

8.2. За столом по кругу сидят 7 аборигенов: рыцари, лжецы и зануды (хотя бы один представитель каждого племени за столом есть). Рыцарь всегда говорит правду, лжец – всегда лжет. Зануда лжет, если рядом с ним сидит хотя бы один рыцарь, а в остальных случаях говорит что угодно.

Сколько за столом могло оказаться зануд, если на вопрос «Кто твои соседи?» каждый ответил «Оба моих соседа – зануды». Приведите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

Ответ: 2, 3 или 4.

Решение:

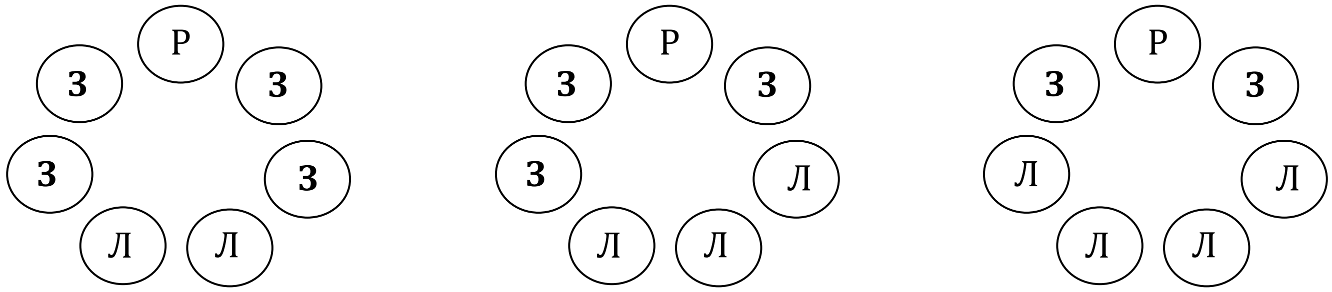
Один зануда за столом сидеть не мог, т.к. за столом обязательно сидит рыцарь, который говорит правду, а значит, зануд хотя бы две.

Так как за столом сидят представители всех племен, то зануд не более пяти.

Попытаемся рассадить 5 зануд. Оставшиеся два места заняты рыцарем и лжецом.

Рыцарь и лжец не могут сидеть рядом, т.к. иначе рыцарь солжет. Значит, они сидят хотя бы через одного зануду. Но лжеца не могут окружать зануды, т.к. в этом случае он скажет правду. Значит, 5 зануд за столом оказаться не могли.

Далее приведем примеры рассадки 2, 3 и 4 зануд за столом:



Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное обоснованное решение;

4 балла – найдено только два верных ответа при наличии обоснования;

3 балла – найден только один верный ответ при наличии обоснования;

только ответ – 0 баллов.

8.3. Известно, что и КРУГ, и КУБ являются кубами некоторых чисел. Найдите все возможные значения чисел КРУГ и КУБ. Перечислите их все и объясните, почему других нет. (Одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, разные цифры – разными буквами.)

Ответ: 1728 и 125.

Решение: Заметим, что в словах КУБ и КРУГ две повторяющиеся цифры – К и У.

Выпишем всевозможные трехзначные числа, являющиеся кубами некоторых чисел:

5^3=125, 6^3=216, 7^3=343, 8^3=512, 9^3=729 (4^3 = 64 – двузначное; 10^3 = 1000 – четырехзначное). Заметим, что 343 нам не подходит (К ≠ Б).

Выпишем возможные варианты букв К и У:

У	1	2
К	2 или 5	1 или 7

Выпишем всевозможные четырехзначные числа, являющиеся кубами некоторых чисел:

10^3 = 1000, 11^3 = 1331, 12^3=1728, 13^3 = 2197, 14^3 = 2744, 15^3 = 3375, 16^3 = 4096, 17^3 = 4913, 18^3 = 5832, 19^3= 6859, 20^3 = 8000, 21^3 = 9261 (9^3=729 – трехзначное; 22^3 = 10648 – пятизначное).

Заметим, что 1000, 1331, 2744, 3375 и 8000 нам не подходят, т.к. К, Р, У и Г – различные цифры.

Среди оставшихся вариантов выпишем всевозможные значения для букв К и У:

У	1	2	3	5	6	9
К	4	1	5	6	9	2 или 4

Заметим, что К и У в числах КРУГ и КУБ совпадают только при У = 2, К = 1. Значит, существует единственное решение: КРУГ = 1728, КУБ = 125.

Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное верное обоснование;

4-5 баллов – ответ найден верно, но решение недостаточно обоснованно;

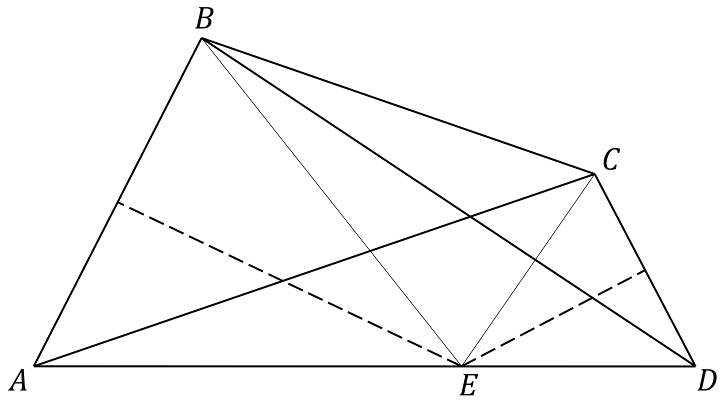
3 балла – идея рассмотреть одинаковые буквы У и К, но решение не закончено или с ошибками;

только ответ – 0 баллов.

8.4. В четырехугольнике $ABCD$, в котором $\angle A = \angle D$, провели серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD. Оказалось, что они пересеклись на стороне AD. Докажите, что диагонали четырехугольника $ABCD$ равны.

Решение:

Пусть E– точка пересечения серединных перпендикуляров. Тогда AE = EB, CE = ED и ∠EBA = ∠EAB = ∠ECD = ∠EDC. Тогда ∠AEB = ∠CED, значит, ∠AEC = ∠BED. Но тогда △AEC = △BED (по двум сторонам и углу между ними) и AC = BD(как стороны равных треугольников).



Критерии:

7 баллов – полное верное доказательство;

3-5 баллов – частично верное доказательство.

8.5. Группа детей после муниципального этапа по математике, выстроилась в круг, обсуждая решенные задачи. При этом оказалось, что в круге стоит ровно 20 будущих призеров и ровно 25 будущих победителей муниципального этапа таких, что у каждого хотя бы один из соседей — это участник, не попавший ни в призеры, ни в победители. Докажите, что рядом с кем-то стоят два участника, не попавших ни в призеры, ни в победители.

Решение. Если среди стоящих в круге детей подряд стоят несколько участников, не попавших ни в призеры, ни в победители (далее будем их называть просто — участниками), выгоним их всех, кроме одного. Очевидно, это не повлияет на условия задачи. Теперь у каждого участника в соседях только призеры или победители. При этом о соседстве с простым участником заявили 45 детей. И это означает, что каждый простой участник учитывался в качестве соседа двух различных детей, и суммарное число подсчитанных соседей у простых участников должно быть четным, т.е. не может быть равно 45.

Критерии

7 баллов – полное верное доказательство;

3-5 баллов – частично верное продвижение в решении.