Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2020– 2021 учебный год
Математика
8 класс

Требования к проверке работ:
1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;
2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

В комментариях к отдельным задачам, в приведенных ответах и решениях к задачам олимпиады, указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

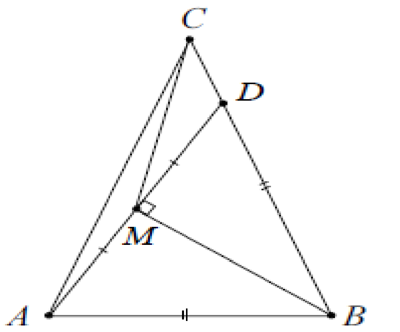
Ответы и решения

8.1. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.
Ответ. 133.
Решение. Так как $1000 = 5^3 \cdot 2^3$, то каждое из чисел в своем разложении на простые множители может содержать только двойки и пятёрки. При этом оба этих множителя не могут присутствовать в разложении одного числа, иначе оно будет делиться на 10. Следовательно, одно из чисел равно 5^3, а другое – 2^3, а их сумма равна $5^3 + 2^3 = 125 + 8 = 133$.

8.2. Существуют ли пять таких двузначных составных чисел, что каждые два из них взаимно просты?
Ответ. Не существуют.
Решение. Каждое из составных чисел является произведением, по крайней мере, двух простых чисел. В каждом из таких произведений не может быть больше одного двузначного сомножителя, иначе это произведение будет, как минимум, трёхзначным. Значит, в разложении на простые множители каждого из искомых двузначных чисел должно присутствовать однозначное простое число. Но простых однозначных чисел всего четыре: 2, 3, 5 и 7. Следовательно, среди любых пяти составных двузначных чисел найдутся два, у которых будет общий делитель, отличный от 1.

8.3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB на стороне CB выбрана точка D так, что $CD = AC – AB$. Точка M — середина AD. Докажите, что угол BMC — тупой.

Решение. Так как $CD = AC - AB = BC - AB$, получаем, что $DB = AB$, а значит, треугольник ABD равнобедренный. Тогда его медиана BM является и высотой, т. е. угол BMD прямой. Значит, $\angle BMC = \angle BMD + \angle DMC = 90° + \angle DMC > 90°$ тупой.



Критерии.
7 баллов. Полное верное решение.
2 балла. Доказано, что треугольник ABD равнобедренный, но больше продвижений нет.

8.4. В записи $* + * + * + * + * + * + * + * = **$ замените звёздочки различными цифрами так, чтобы равенство было верным. Обоснуйте, что приведенный пример единственен с точностью до порядка слагаемых в левой части равенства.
Ответ. 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 + 0 = 36, пример единственен с точностью до порядка слагаемых в левой части равенства.
Решение. 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 + 0 = 36.
Отметим, что приведенный пример единственен с точностью до порядка слагаемых в левой части равенства. Действительно, пусть в правой части стоит число $\overline{ab}$. Так как сумма десяти различных цифр равна 45, то данное равенство можно записать в виде $45 - a - b = 10a + b$. Упрощая его, получим: $11a + 2b = 45$.
Простейший перебор показывает, что $a = 3$, $b = 6$.
Критерии.
5 баллов. Приведен верный пример (без обоснования).
0 баллов. Приведен неверный пример (в частности, с повторяющимися цифрами)

8.5. Белоснежка вошла в комнату, где вокруг круглого стола стояло 30 стульев. На некоторых из стульев сидели гномы. Оказалось, что Белоснежка не может сесть так, чтобы рядом с ней никто не сидел. Какое наименьшее число гномов могло быть за столом? Объясните, как должны были сидеть гномы.
Ответ. 10.
Решение. Если за столом в каком-нибудь месте было бы три свободных стула подряд, то Белоснежка смогла бы сесть так, чтобы рядом с ней никто не сидел. Значит, какие бы три подряд идущих стула мы не взяли, по крайней мере, на одном из них должен сидеть гном. Так как всего стульев 30, то меньше, чем 10 гномов быть не может. Покажем, что рассадить 10 гномов так, чтобы выполнялось условие задачи можно: посадим гномов через два стула: на первый стул, на четвертый стул, на седьмой и т.д. Тогда условие задачи будет выполнено.

Интернет-ресурсы: http://www.problems.ru, https://olimpiada.ru.