Всероссийская олимпиада школьников 2020/2021 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
8 класс

Общее время выполнения работы – 3 часа 00 мин (180 минут).
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, <u>даже если при этом дан верный ответ</u>.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.
При наличии дополнительных критериев решение школьника оценивается в соответствии с ними.

Задание 8.1
Дано множество положительных чисел a_1, a_2, …, a_n, меньших единицы. Доказать, что не может быть одновременно

$$a_1(1-a_2)>\frac{1}{4},\quad a_2(1-a_3)>\frac{1}{4},\quad ...,\quad a_n(1-a_1)>\frac{1}{4}$$

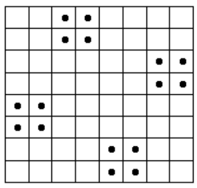
Количество баллов 7
Решение
Перемножив эти неравенства и перегруппировав, получим

$$(a_1(1-a_1))(a_2(1-a_2))\quad ...\quad (a_n(1-a_n))>\frac{1}{4^n}$$

А это неравенство невозможно, поскольку

$$0<a_k(1-a_k)=-\frac{1}{4}+a_k-a_k^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}$$

Задание 8.2
Найти наибольшее значение, которое может принять произведение натуральных чисел, сумма которых равна 2020.
Количество баллов 7
Ответ:
$2^2 \cdot 3^{672}$
Решение
Если в произведении есть число *x* большее 4, то заменив его на сумму $3+(x–3)$, получим большее произведение, поскольку при таких значениях $x < 3(3 – x)$. Если есть слагаемое равное 1, то объединив его с любым другим слагаемым, получим большее произведение. Таким образом, число 2020 надо представить в виде суммы двоек и троек.
Имеем
$2+2+2=3+3$, но $2\cdot2\cdot2 < 3\cdot3$
Поэтому троек должно быть максимальное количество. Поэтому $2020 = 672\cdot3 + 2\cdot2$
А максимальное произведение равно $2^2\cdot3^{672}$

Задание 8.3
Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?
Количество баллов 7
Ответ:
можно
Решение
См. рисунок:


Задание 8.4
Петя и Вася сделали в тире по 5 выстрелов. Первыми тремя выстрелами они выбили поровну, а последними тремя Петя выбил в три раза больше очков, чем Вася. На мишени остались пробоины в 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2 очков. Куда попал каждый из них третьим выстрелом? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.
Количество баллов 7
Ответ:
Третьим выстрелом Петя выбил 10, а Вася - 2 очка.
Решение. Последними тремя выстрелами Вася не мог выбить больше, чем 9 очков (иначе Петя бы выбил последними тремя выстрелами не меньше 30). Меньше 9 очков Вася тоже выбить не мог, так как наименьшая сумма за три выстрела $2 + 3 + 4 = 9$. Следовательно, Вася выбил 2, 3 и 4 очка а Петя 10, 9 и 8 очков (других вариантов набрать 27 очков тремя выстрелами нет). Значит первыми двумя выстрелами мальчики выбили 9, 8, 5 и 4 очка. При этом Петя третьим выстрелом выбил не меньше, чем 8, а Вася - не больше, чем 4 очка. Так как сумма очков после первых трех выстрелов была равной, значит, первыми двумя выстрелами Петя выбил по крайней мере на четыре очка меньше, чем Вася. Единственная возможность - Вася выбил 9 и 8, а Петя 5 и 4 очка, следовательно, третьим выстрелом Вася выбил 2, а Петя 10 очков.

Задание 8.5

Про треугольник, один из углов которого равен 120°, известно, что его можно разрезать на два равнобедренных треугольника. Чему могут быть равны два других угла исходного треугольника?

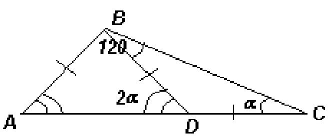
Количество баллов 7

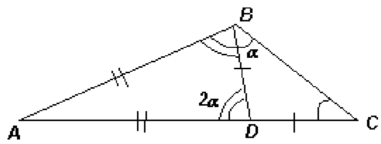
Ответ:

40° и 20° или 45° и 15°.

Решение

Пусть в треугольнике ABC $\angle B = 120°$. Разрез, указанный в условии задачи, должен проходить через вершину треугольника (иначе при разбиении не получится два треугольника). При этом он может проходить как через вершину B, так и через другую вершину. В первом случае (BD – линия разреза), хотя бы один из образовавшихся треугольников, например, треугольник BDC не будет остроугольным, поэтому BC – его основание. Тогда $\angle DBC = \angle DCB = \alpha$, $\angle BDA = 2\alpha$ – внешний для треугольника BDC. При этом в треугольнике ABD сторона AB основанием быть не может (иначе из равенства $DA = DB = DC$ будет следовать, что $\angle B = 90°$, что противоречит условию). Следовательно, его основанием является либо AD, либо BD.





Если AD – основание, то $AB = DB$ (рис. слева). Тогда $\angle A = \angle BDA = 2\alpha$. Из треугольника ABC получим $2\alpha + \alpha = 60°$, $\alpha = 20°$. Таким образом, $\angle C = 20°$, $\angle A = 40°$. Если BD – основание, то $AB = AD$ (рис. справа). Тогда $\angle ABD = \angle BDA = 2\alpha$. Значит, $\angle B = 3\alpha$, $\alpha = 40°$, то есть $\angle C = 40°$. Во втором случае линия разреза должна пройти через вершину большего из двух острых углов (AE – линия разреза, см. рис.). Тогда оба образовавшихся треугольника будут тупоугольными. При этом $AB = BE$ и $AE = EC$. Следовательно, $\angle BAE = \angle BEA = ½\,(180° – \angle B) = 30°$, а $\angle EAC = \angle ECA = ½\,\angle BEA = 15°$.

Таким образом, $\angle C = 15°$, $\angle A = 45°$.