8 класс

Задача 8.1 (7 баллов)

На олимпиаду каждый из 40 восьмиклассников принёс одну ручку, один карандаш и одну линейку. После окончания олимпиады оказалось, что 27 школьников потеряли ручку, 33 – линейку и 29 – карандаш. Каким могло быть наименьшее количество восьмиклассников, потерявших все три предмета.

Решение:

Оценка минимальности

Из условия следует, что у 13 восьмиклассников есть ручка, у 7 – линейка и у 11 – карандаш. Таким образом, обладать хотя бы одним предметом могут не более чем $13 + 7 + 11 = 31$ человек. А значит, не менее чем $40 - 31 = 9$ человек потеряли все три предмета.

Пример

Все три предмета потеряют ровно 9 человек, если каждый из остальных 31 потеряет ровно два предмета.

Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Доказательство оценки без примера	5
Пример без оценки	2
Неверный ответ	0

Ответ: 9 восьмиклассников

Задача 8.2 (7 баллов)

Акции компании "Ну-и-Ну" растут в цене на 10 процентов каждый день. Бизнесмен Боря ежедневно три дня подряд закупал акции компании на 1000рублей, а на четвертый их все продал. Сколько денег он заработал на этой операции?

Решение: $1000\cdot1{,}1^3+1000\cdot1{,}1^2+1000\cdot1{,}1-3\cdot1000=1331+1210+1100-3000=641$.

Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Верный ход решения с арифметической ошибкой	4
Верный ответ без обоснования	0

Ответ: 641 рубль

Задача 8.3 (7 баллов)

Докажите, что $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}>\frac{1212}{2020}$

Решение:

Разобьём ряд на скобки $(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020})$. Каждая скобка даёт положительное число. $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}=\frac{3}{5}=\frac{1212}{2020}$

Остальная часть выражения увеличит число.

Критерии	***баллы***

Полное решение	7
Верный ход решения с арифметической ошибкой	5
Разбиение на положительные скобки, без дальнейшего продвижения	2
Неверное решение	0

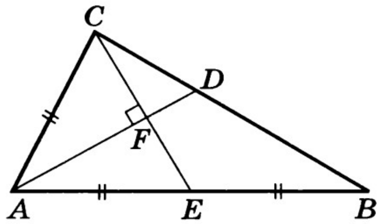
Задача 8.4 (7 баллов)

В треугольнике ABC биссектриса AD пересекает медиану CE под прямым углом. Докажите, что одна из сторон этого треугольника вдвое меньше другой.

Решение:

Доказательство.

Пусть в треугольнике ABC биссектриса AD и медиана CE пересекаются в точке F. Тогда AF — биссектриса и высота в треугольнике ACE, значит, этот треугольник равнобедренный (AC = AE), а так как CE — медиана, то AB = 2AE и, следовательно, AB = 2AC.



Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Получена равнобедренность треугольника ACE	3
Неверное решение	0

Задача 8.5 (7 баллов)

Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 48^2 и содержит только цифры 0 и 1.

Решение:

$48^2=2^8\cdot3^2$. Чтобы число делилось на 2^8, оно по признаку делимости должно оканчиваться хотя бы на 8 нулей, т.к. иначе при меньшем количестве нулей ($n\le7$) будет иметь вид (1 и 0 могут идти вперемежку) $1\ldots.1\cdot10^n$ и разделится только на n-ю степень двойки, а нам нужна делимость на 8-ю степень. Чтобы число делилось на $3^2=9$ оно по признаку делимости должно иметь сумму цифр, кратную 9, значит, в числе должно быть кратное 9 количество единиц, т.е. не менее 9. Следовательно, наше число должно иметь не менее 9 единиц и оканчиваться хотя бы на 8 нулей, а наименьшим таким числом будет 11111111100000000 (из 9 единиц и 8 нулей), которое делится и на 2^8, и на 3^2, значит, в силу их взаимной простоты и на их произведение $2^8\cdot3^2=48^2$.

Критерии	***баллы***
Полное решение	7
Выведена необходимость 8 нулей	3
Показана делимость на 9	3
Неверное решение	0

Ответ: 11111111100000000 (из 9 единиц и 8 нулей)