Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2020-2021 уч.год

8 класс

Решения и ответы

1. От Центральной площади до вокзала идет прямая улица, которая разделена 11-ю перекрестками на 12 одинаковых кварталов. На каждом перекрестке установлен светофор. Все светофоры одновременно включают зеленый сигнал на 3 минуты, затем на 1 минуту одновременно включают красный сигнал. Автобусу требуется две минуты на то, чтобы проехать квартал (от перекрестка до перекрестка), легковой автомобиль проезжает один квартал за минуту. Автобус и автомобиль одновременно выезжают от площади, в этот момент на всех светофорах загорается зеленый. Какое транспортное средство первым приедет на вокзал, и на сколько минут раньше?
Решение. Легковой автомобиль первые три минуты проедет три квартала без препятствий. При подъезде к перекрестку, отделяющему третий квартал от четвертого, автомобиль остановится на светофоре на 1 минуту. Таким образом, чтобы проехать три квартала и начать движение по четвертому кварталу, автомобилю потребуется четыре минуты. Далее движение автомобиля повторится, девятый квартал вместе с перекрестком он покинет через 12 минут. Следующие три квартала автомобиль проедет за 3 минуты, и, так как после двенадцатого квартала нет светофора, он подъедет к вокзалу через 15 минут после выезда от площади.
Автобус проедет первый квартал, первый перекресток и второй квартал без остановки и подъедет к второму перекрестку в тот момент, когда красный свет сменится на зеленый. Поэтому в начале третьего квартала повторится такая же ситуация, как в начале первого квартала – автобус начинает движение по третьему кварталу в момент, когда на светофоре загорелся зеленый. Далее он снова проедет все перекрестки без остановок на светофорах. Время движения автобуса – 24 минуты.
Итак, автомобиль приедет раньше на 9 минут.
Ответ. Первым приедет легковой автомобиль, он опередит автобус на 9 минут.

2. Найдите все решения уравнения
$$x^4 = y^2 + 2y + 2$$
где x, y – целые числа.
Решение. Выделим квадрат суммы в правой части, перенесем квадрат влево и разложим левую часть на множители.
$$x^4 = y^2 + 2y + 1 + 1 \quad x^4 = (y+1)^2 + 1$$
$$x^4 - (y+1)^2 = 1$$
$$(x^2 - y - 1)(x^2 + y + 1) = 1$$
Произведение двух целых множителей равно 1 только тогда, когда оба эти множителя одновременно равны 1 или -1. Решим две системы уравнений.
$$\begin{cases} x^2 - y - 1 = 1, \\ x^2 + y + 1 = 1. \end{cases}$$
Сложим два уравнения.
$$2x^2 = 2.$$

$$\begin{cases} x^2 = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

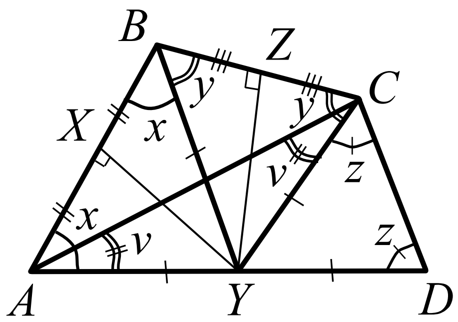
Получили две пары решений $(-1,-1)$ и $(1,-1)$. Решаем вторую систему

$$\begin{cases} x^2 - y - 1 = -1, \\ x^2 + y + 1 = -1. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет, так как приводит к уравнению $2x^2 = -2$.
Ответ. $(-1,-1)$ и $(1,-1)$.

3. Студент Петя хранит свои файлы на флешках и на переносных жестких дисках, причем у него число файлов на переносных дисках больше, чем число файлов на флешках. Количество файлов с фотографиями у Пети больше, чем файлов с текстами. Обязательно ли на переносных дисках у Пети есть файлы с фотографиями?
Решение. Да, на дисках обязательно имеются файлы с фотографиями. Доказательство от противного. Пусть на дисках нет файлов с фотографиями, тогда все диски заняты файлами с текстами. Число файлов на дисках больше, чем на флешках, поэтому число текстовых файлов на дисках больше, чем общее число файлов с текстами и с фотографиями на флешках. Значит, число файлов с текстами больше, чем число файлов с фотографиями. Получили противоречие.
Ответ. На переносных дисках обязательно имеются файлы с фотографиями.

4. В четырехугольнике $ABCD$ точки X, Y, Z – середины отрезков AB, AD, BC соответственно. Известно, что XY перпендикулярен AB, YZ перпендикулярен BC, величина угла ABC равна $100°$. Найдите величину угла ACD.



Решение 1. Треугольники AYB, BYC, AYC и CYD – равнобедренные, это следует из условия. Обозначим равные углы $\angle BAY = \angle ABY = x$, $\angle CBY = \angle BCY = y$, $\angle DCY = \angle CDY = z$, $\angle CAY = \angle ACY = v$ (см.рис.). Нам дано, что $x + y = 100°$. Требуется найти $z + v$.
Сумма углов в четырехугольнике $ABCD$ равна $x + x + y + y + z + z = 360°$. Отсюда $z = 80°$. Вычислим величину угла при вершине равнобедренного треугольника CYD. $\angle CYD = 180° - 2z = 20°$. Этот угол является внешним углом треугольника AYC, поэтому $\angle CYD = 2v$, откуда $v = 10°$. Теперь можем найти величину угла ACD. $\angle ACD = z + v = 80° + 10° = 90°$.
Решение 2. Из условия сразу следует, что треугольники AYB и BYC – равнобедренные, и боковые стороны у них равны между собой и равны отрезкам AY и YD. Получаем, что точка Y – центр окружности, описанной вокруг четырехугольника $ABCD$, при этом AD – диаметр этой окружности. Значит, угол ACD – прямой.
Ответ. $\angle ACD = 90°$.

5. Существуют ли такие шесть натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого из них делится на каждое из остальных?
Решение. Такие числа существуют. Возьмем шесть различных простых чисел $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$. Построим шесть чисел

$$
\begin{aligned}
&a_1 = p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6\\
&a_2 = p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6\\
&a_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^2 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6\\
&\ldots\\
&a_6 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6^2
\end{aligned}
$$

Проверкой убеждаемся, что ни одно из чисел не делится ни на какое-либо другое (из-за наличия квадрата одного из простых чисел в делителе). Возведение любого числа в квадрат дает необходимый квадрат простого числа, и второе условие делимости выполняется.
Ответ. Такие числа существуют.