8 класс. Решения и критерии

1. Пиццу разрешается резать на одинаковые части, частей должно быть не более 6. Как разделить между 15 человеками поровну 8 одинаковых пицц? («Лишние» куски пиццы оставаться не должны)

Решение: Например, разрежем первые три пиццы на 5 одинаковых частей каждую – получим 15 одинаковых кусков по 1/5 пиццы. Затем оставшиеся 5 пицц разрежем на 3 части каждую – получим 15 одинаковых кусков по 1/3 пиццы. Выдав каждому из 15 человек по одному куску того и другого типа, мы и получим требуемое.

Критерии. Любое верное решение – 7 баллов. Если пиццы разрезаны, но по тексту непонятно, как куски распределяются между 15 человеками – не более 5 баллов.

2. Даны три не обязательно целых числа. Если каждое из данных чисел увеличить на 1, то произведение чисел тоже увеличится на 1. Если каждое из чисел увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. Найдите эти числа.

Решение. Пусть искомые числа a, b, c. По условию, $(a+1)(b+1)(c+1) = abc+1$ и $(a+2)(b+2)(c+2) = abc+2$. Раскрывая скобки, получаем соответственно $ab+bc+ca+a+b+c = 0$ и $2(ab+bc+ca)+4(a+b+c) = -6$. Отсюда $a+b+c = -3$ и $ab+bc+ca = 3$. Поскольку $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 9$, имеем $a^2+b^2+c^2 = 3$. Но тогда $2\cdot 3 - 2\cdot 3 = 2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca) = (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2) = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0$, значит $a = b = c$ и с учетом $a = b = c = -3$ будет $a = b = c = -1$.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Найдены $a+b+c$ и $ab+bc+ca$ – 2 балла, если после этого угадан ответ – еще 1 балл. Найдены $a+b+c$ и $a^2+b^2+c^2$ – 3 балла, если после этого угадан ответ – еще 1 балл. Написано $a^2+ab+b^2+3a+3b+3 = 0$ – 4 балла, если после этого угадан ответ – еще 1 балл. Любое верное решение – 7 баллов.

3. Поликарп вместо обычного умножения трехзначных чисел решил просто «склеить числа», приписав одно число за другим. Результат оказался в 7 раз больше, чем обычное. Какие числа перемножал Поликарп?

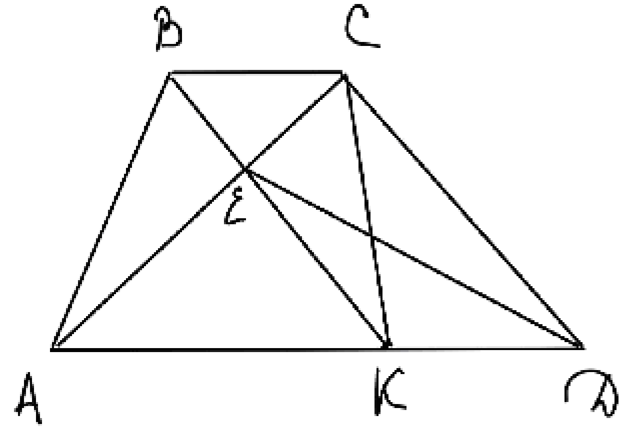
Ответ. 143 и 143.

Решение. Обозначим исходные числа через a и b. Результат обычного умножения будет ab, результат «склеивания» – $1000a+b$. По условию они связаны соотношением $1000a+b = 7ab$, откуда $b = \dfrac{1000a}{7a-1}$. Заметим, что числа a и $7a-1$ не имеют общих делителей, так что $p = 7a-1$ – делитель 1000. В силу того, что $a \geqslant 100$ имеем $p \geqslant 699$, но тогда $p = 1000$, $a = \dfrac{1000}{7} = 143$ и $b = a$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов, правильно составлено уравнение – 3 балла. Выведен правильный ответ, но не доказано, что других нет – 5 баллов.

4. На диагонали AC трапеции с основанием AD выбрали точку E. Укажите способ выбора точки E так, чтобы треугольники ABC и ECD были равновеликими (то есть имели равные площади).

Ответ. Точка E должна быть точкой пересечения диагонали AC и прямой BK, параллельной стороне CD.



Решение. Площадь треугольника ECD равна площади треугольника CKD, так как у них общее основание CD и равные высоты, проведенные к этому основанию (в силу того, что CD параллельно EK).

Площадь треугольника CKD равна площади треугольника ABC, так как у них равные основания BC и KD (свойство параллелограмма) и равные высоты (в силу того, что BC параллельно KD).

Отсюда и следует требуемое.

5. У Миши есть квадрат 7×7 из бумаги, все клетки которого белые. Миша хочет закрасить N клеток в черный цвет. При каком наименьшем N Миша может покрасить клетки так, что после закрашивания из квадрата нельзя было бы вырезать по клеткам никакого полностью белого прямоугольника с числом клеток не менее десяти?

Ответ: 4.

Решение. Разобьём квадрат 7×7 на 5 прямоугольников: четыре 3×4 (угол каждого такого прямоугольника совпадает с одним из углов квадрата 7×7) и квадрат 1×1. Если закрашено только три клетки, то найдётся белый прямоугольник из 12 клеток. Пример для 4 клеток: закрашиваем $b4, d2, d6, f4$ в шахматных обозначениях.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Правильный пример для 4 клеток – 3 балла. Доказательство того, что 3 черных клеток не хватит – 4 балла. Баллы за части этой задачи суммируются.