8 класс

8.1. Если в произведении двух натуральных чисел один сомножитель увеличить на 2, а другой уменьшить на 2, то произведение чисел не изменится. Докажите, что если к этому произведению прибавить 1, то получится квадрат целого числа.

Решение. Обозначим данные натуральные числа *x* и *y*. Тогда $xy = (x+2)(y-2)$. Откуда $y = x+2$. Тогда $xy+1 = x(x+2)+1 = (x+1)^2$.

Комментарий. Доказано, что разность натуральных чисел равна 2 – 2 балла.

8.2. На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 3 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 2 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

Ответ. 3.

Решение. Заметим, что на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек, не может быть 4 синих точек. Действительно, в этом случае между крайними синими точками будет 2 синих, а, значит, еще хотя бы 2 красные. Поэтому на таком отрезке не более 3 синих точек.

Покажем, что 3 синие точки могут лежать на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек. Пусть точки расположены на прямой в следующем порядке: 2 красных – 3 синих – 2 красных – 3 синих – 2 красных. Тогда все условия выполняются, и есть отрезок с 3 синими точками.

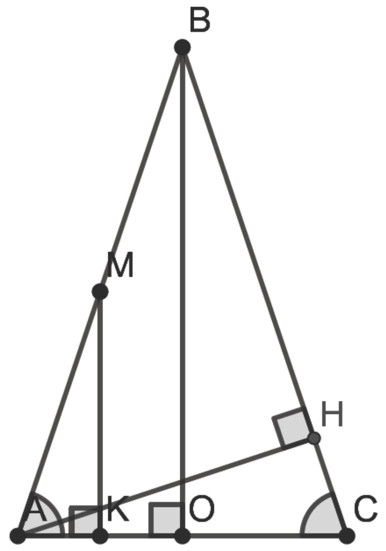
Комментарий. Доказано, что синих точек между соседними красными не больше 3 – 4 балла.

Приведен верный пример с 3 синими точками – 3 балла.

8.3. В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB* = *BC*) проведена высота *AH*, а из середины *M* стороны *AB* опущен перпендикуляр *MK* на сторону *AC*. Оказалось, что *AH* = *MK*. Найдите периметр треугольника *ABC*, если *AK* = *a*.

Ответ. 20*a*.

Решение. Треугольник *ABC* – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники *MAK* и *ACH* равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведем высоту *BO* треугольника *ABC*. По теореме Фалеса $AK : KO = AM : MB$, значит $AO = 2AK = 2a$. Тогда $AC = 2AO = 4a$, $AB = 2AC = 8a$. Значит, периметр равен $8a + 8a + 4a = 20a$.



Комментарий. Доказано равенство треугольников *MAK* и *ACH* – 2 балла.

8.4. В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 5×5. В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

Ответ. 13 лжецов.

Решение. Заметим, что в соседних комнатах не могут жить лжецы (иначе они говорили бы правду). Выделим одну угловую комнату, а оставшиеся комнаты разобьем на 12 пар соседних. Тогда в каждой паре комнат может жить не более одного лжеца. Поэтому всего лжецов не более $12+1=13$. Рассмотрим шахматную раскраску комнат в черный и белый цвета (угловые комнаты черные). Если поселить 13 лжецов в «черные» комнаты, а 12 рыцарей в «белые», то условие задачи будет выполняться (все лжецы будут лгать, а все рыцари будут говорить правду).

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Пример расселения 13 лжецов и 12 рыцарей – 2 балла.

Только утверждение про то, что лжецы не могут жить в соседних комнатах – 1 балл.

Доказано, что лжецов не более 13 – 5 баллов.

8.5. Есть 90 карточек – 10 с цифрой 1, 10 с цифрой 2, …, 10 с цифрой 9. Из всех этих карточек составили два числа, одно из которых в три раза больше другого. Докажите, что одно из этих чисел можно разложить на четыре не обязательно различных натуральных множителя, больших единицы.

Решение. Обозначим эти числа A и $B=3A$. Тогда сумма цифр числа B делится на 3. Но сумма цифр на всех карточках делится на 9 (а, значит, и на 3), поэтому сумма цифр числа A делится на 3. Значит, число A делится на 3. Но тогда число $B=3A$ делится на 9 и сумма его цифр делится на 9. А так как сумма цифр на всех карточках делится на 9, то тогда и сумма цифр числа А делится на 9. Значит, число A делится на 9. Поэтому число

$B=3A$ делится на 27. Итак, число B делится на 27 и больше 27, поэтому оно раскладывается на 4 множителя 3, 3, 3 и $\frac{B}{27}>1$.

Комментарий. Доказано, что большее из чисел делится на 9 – 3 балла.