8 класс

8.1. Петя выписал на доске подряд все натуральные числа от 1 до n и подсчитал количество всех написанных цифр. Оно оказалось равным 777. Чему равно n?
Ответ. 295. **Решение**. См. задачу 7.2.

8.2. В мешочке для игры лото 90 бочонков с числами от 1 до 90. Какое наименьшее количество бочонков нужно вынуть наугад из мешочка, чтобы гарантированно получить бочонок с числом, делящимся на 3 или на 5 (или на 3 и 5 одновременно)?
Ответ: 49. **Решение.** См. задачу 7.3.

8.3. Числа a, b, c удовлетворяют соотношению $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Найдите $(a+b)(b+c)(a+c)$.

Ответ. 0. **Решение**. Перенесем $\frac{1}{a}$ в правую часть, получим $\frac{b+c}{bc}=\frac{-(b+c)}{a(a+b+c)}$. Если $b+c\neq 0$, то будем иметь (домножив на знаменатель)

$$a^2+ab+ac+bc=0 \Leftrightarrow a(a+b)+c(a+b)=0 \Leftrightarrow (a+b)(a+c)=0.$$

Итак, в любом случае $(a+b)(b+c)(a+c)=0$.

8.4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке M. Оказалось, что $AB=DM$ и $\angle ABD=\angle CBD$. Докажите, что **а**) $\angle BAD>60^\circ$; **б**) $AB>BC$.
Решение. **а**). Из условий задачи следует, что $AB=AD$, поскольку $\angle DBA=\angle DBC=\angle BDA$ (т.к. $AD \parallel BC$) и значит, ΔABD равнобедренный. Обозначим $\beta=\angle ABD=\angle BDA=\angle DBC$, $\alpha=\angle BAD$. Тогда $\alpha>\beta$, т.к. в треугольнике ABD против угла α лежит сторона $BD>MD=AB$. Поэтому $180^\circ=\alpha+2\beta<3\alpha$ и значит, $\alpha>60^\circ$. **б**) Далее, заметим, что угол AMB тупой: действительно, проекция A_1 точки A на диагональ DB лежит между точками D и M, т.к. в противном случае длина MD не превосходила бы $A_1D<AD$, что противоречит равенству $AD=AB=MD$. По свойству внешнего угла AMB для треугольника MBC и внешнего угла CMB для треугольника AMB неравенство $\angle AMB>\angle BMC$ запишется в виде $\beta+\angle BCM>\beta+\angle BAM$. Таким образом, $\angle BCA>\angle BAC$ и поэтому $AB>BC$.

8.5. Коля начертил 10 отрезков и отметил красным цветом все точки их пересечения. Подсчитав красные точки, он заметил такое свойство: на каждом отрезке красных точек равно три. **а)** Приведите пример расположения 10 отрезков с данным свойством**.** **б)** Каким может быть наибольшее количество красных точек для 10 отрезков с данным свойством?
Ответ: **б)** 15. **Решение.** **а)** См. пример на рисунке. В качестве другого примера можно взять две копии правой части рисунка из задачи 7.5. **б)** Приведенный на рисунке пример показывает, что можно получить 15 красных точек. Докажем, что это – максимально возможное число. Занумеруем все 10 отрезков и около каждой красной точки запишем номера отрезков, которым она принадлежит. Поскольку красная точка принадлежит как минимум двум отрезкам, то суммарное количество записанных номеров не менее $2N$, где N –число красных точек (номера записаны не по одному разу). Но по условию каждый номер отрезка записан у трех красных точек, т.е. всего записано ровно 30 номеров (каждый из 10 номеров отрезков записан трижды). Значит, $2N\le 30$, т.е. $N\le 15$. *Замечание*. Из доказательства следует, что максимум N = 15 достигается только в том случае, когда каждая красная точка принадлежит ровно двум отрезкам (во втором примере из п. а), где есть точки пересечения трех отрезков, N = 14).