

**Муниципальный тур ВСОШ олимпиады по математике
(2020/2021 уч. год)**

Ответы и решения заданий

Общие критерии оценивания каждой задачи:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задания для 8 класса

Задача №1

Известно, что $\frac{1}{3a} + \frac{2}{3b} = \frac{3}{a+2b}$. Докажите, что $a = b$.

Решение.

1 способ. Преобразуем данное равенство, умножив обе его части на $3ab(a + 2b)$. Получим: $b(a + 2b) + 2a(a + 2b) = 9ab$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых равенство примет вид: $2b^2 + 2a^2 - 4ab = 0$. Следовательно, $2(a - b)^2 = 0$, $(a - b) = 0$, откуда $a = b$.

2 способ. Привести левую часть к общему знаменателю, а затем воспользоваться основным свойством пропорции.

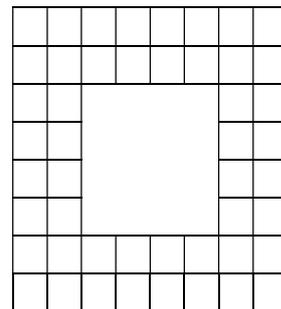
Критерии проверки.

«+» Приведено полное обоснованное решение

«-» Задача не решена или решена неверно

Задача №2

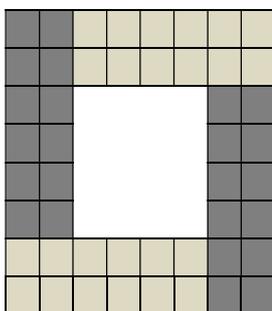
В рамке 8×8 шириной в 2 клетки (см. рисунок) всего 48 клеточек. Сколько клеточек в рамке 254×254 шириной в 2 клетки?



Ответ: 2016.

Решение

Первый способ. Разрежем рамку на четыре одинаковых прямоугольника так, как показано на рисунке. Ширина прямоугольников равна ширине рамки, т. е. 2 клетки. Длина каждого прямоугольника на 2 меньше стороны рамки: $254 - 2 = 252$ клетки. Тогда площадь одного прямоугольника равна $2 \cdot 252 = 504$. А значит, всего в рамке $4 \cdot 504 = 2016$ клеток.



Второй способ. Площадь рамки можно получить, если из площади квадрата 254×254 вычесть площадь внутреннего квадрата. Сторона внутреннего квадрата на 4 клетки меньше стороны большого. Значит, площадь рамки равна $254^2 - 250^2 = (254 - 250)(254 + 250) = 2016$.

Замечание. Если обозначить сторону рамки через n , то можно доказать (например, описанными выше способами), что её площадь будет равна $(8n - 16)$ клеток.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верный ход решения, но допущена арифметическая ошибка — 3 балла.
- Верное рассуждение, но допущена ошибка в оценке размеров (например, во втором способе ошибочно считается, что внутренний квадрат имеет сторону на 2 клетки меньше, чем большой) — 2 балла.
- Только верный ответ — 1 балл.

Задача №3

Какие две цифры можно приписать к числу 1313 справа, чтобы полученное шестизначное число делилось на 53?

Ответ: 34 или 87.

Решение: $1313xy$, x -цифра десятков, y - цифра единиц, тогда $10 \leq xy \leq 99$, $1313xy = \underline{131300} + xy = \underline{2477 \cdot 53} + \underline{19} + xy$. Так как число натуральное и должно делиться на 53, то $(19 + xy)$ должно быть кратно 53, то есть возможны случаи:

- 1) $19 + xy = 53$, тогда $xy = 34$
- 2) $19 + xy = 106$, тогда $xy = 87$
- 3) $19 + xy = 159$, отсюда $xy = 160$ – не подходит, т.к. содержит не две, а три цифры.

Задача №4

Два парома одновременно отходят от противоположных берегов реки и пересекают её перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 метров от берега, после чего продолжают движение. На обратном пути они встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?

Ответ: 1760 м

Решение.

Суммарное расстояние, пройденное паромами к моменту первой встречи, равно ширине реки, а расстояние, пройденное к моменту второй встречи равно утроенной ширине реки. Следовательно, до второй встречи каждый из паромов прошёл втрое большее расстояние, чем до первой встречи. Так как один из паромов до первой встречи прошёл 720 м, то до второй встречи он прошёл расстояние $720 \cdot 3 = 2160$ м. При этом он прошёл путь, равный ширине реки, и ещё 400 м. Следовательно, ширина реки равна $2160 - 400 = 1760$ м.

Задача №5

Точка E – середина стороны AB параллелограмма $ABCD$. На отрезке DE нашлась такая точка F , что $AD = BF$. Найдите величину угла CFD .

Ответ: 90° .

Решение

Продолжим DE до пересечения с прямой BC в точке K (см. рис.).

Так как $BK \parallel AD$, то $\angle KBE = \angle DAE$.

Кроме того, $\angle KEB = \angle DEA$ и $AE = BE$, значит, равны треугольники BKE и ADE . Тогда $BK = AD = BC$. Таким образом, в треугольнике CFK медиана FB равна половине стороны, к которой она проведена, поэтому этот треугольник – прямоугольный с прямым углом F . Следовательно, и угол CFD – прямой.

Критерии проверки.

«+» Приведено верное обоснованное решение

«±» Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности

«-» Приведен только ответ

«→» Задача не решена или решена неверно

