

*Муниципальный этап Российской олимпиады школьников по математике
2020-21 учебного года
8 класс (время решения – 4 часа)*

1. У Васи есть 8 карточек с цифрами 1, 2, 3 и 4 – по две с каждой цифрой. Он хочет сложить из них восьмизначное число так, чтобы между двумя единицами была одна цифра, между двойками – две цифры, между тройками – три, а между четверками – четыре. Укажите какое-нибудь число, которое может получить Вася.

Ответ: 41312432 или 23421314.

Критерии. Указано одно из чисел, удовлетворяющих условию – 7 баллов. Указаны два числа, удовлетворяющих условию – 7 баллов. Способ построения чисел описывать не требуется. В остальных случаях (в том числе, если указано несколько чисел, среди которых есть не удовлетворяющие условию) – 0 баллов.

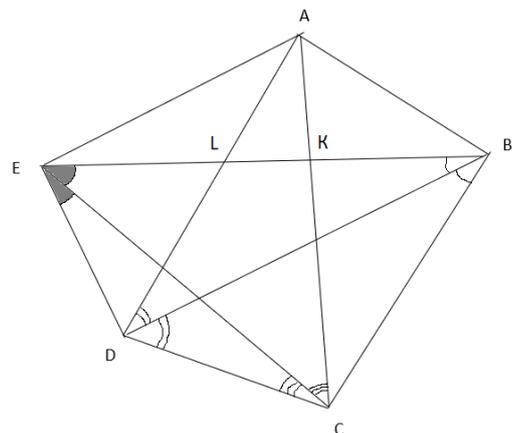
2. Из одной точки прямолинейного шоссе одновременно (но, возможно, в разных направлениях) стартуют 3 велосипедиста. Каждый из них едет с постоянной скоростью, не меняя направление движения. Через час после старта расстояние между первым и вторым велосипедистом составило 20 км, а расстояние между первым и третьим – 5 км. С какой скоростью едет третий велосипедист, если известно, что он едет медленнее первого, а скорость второго – 10 км/ч? Укажите все возможные варианты.

Ответ. 25 км/ч или 5 км/ч.

Решение. Нарисуем вдоль шоссе числовую ось, приняв за начало координат точку старта велосипедистов и направив её по направлению движения второго велосипедиста. Его скорость 10 км/ч, поэтому через час он оказался в точке В с координатой 10. Расстояние от него до первого велосипедиста равно 20 км, значит первый велосипедист оказался в точке A_1 с координатой 30 (если ехал в том же направлении, что второй) либо в точке A_2 с координатой -10 (если ехал в противоположном направлении). Определим координату третьего велосипедиста. Расстояние между ним и первым составило 5 км. Однако поскольку его скорость меньше, он не мог уехать дальше от точки старта. Следовательно, в первом случае он оказался в точке C_1 с координатой $30-5=25$, а во втором – в точке C_2 с координатой $-10+5=-5$. Соответственно, в первом случае его скорость 25 км/ч (и все велосипедисты ехали в одном направлении), а во втором случае его скорость 5 км/ч (и направление движения 1го и 3го велосипедистов противоположно направлению движения 2го).

Критерии. Только ответ (если указаны оба варианта) – 1 балл. Если в решении разбирается только один случай – не более 3 баллов.

3. В выпуклом пятиугольнике ABCDE отрезок BD делит каждый из углов CBE и CDA пополам, а отрезок CE делит пополам каждый из углов ACD и BED. Диагональ BE пересекает диагонали AC и AD в точках K и L соответственно. Докажите, что $CK = DL$.



Решение. Треугольники KEC и DEC равны по 2 признаку ($\angle KEC = \angle DEC$, $\angle KCE = \angle DCE$, CE общая), поэтому $CK = CD$. Аналогично, треугольники DBL и DBC также равны по 2 признаку ($\angle DBL = \angle DBC$, $\angle BDL = \angle BDC$, BD общая), поэтому $DL = CD$. Таким образом, $CK = CD = DL$.

4. За круглым столом сидят три школьника. Перед каждым из них лежит блокнот, на первой странице которого каждый школьник написал произвольное целое число. Далее все трое одновременно сделали следующее: каждый посмотрел числа на первых страницах блокнотов своих соседей, вычел из числа правого соседа число левого соседа и записал результат на вторую страницу своего блокнота. После этого они снова проделали аналогичные действия с числами на вторых страницах, записав результат на третьи страницы. Подобное они проделывали еще несколько раз: смотрели числа соседей, вычитали и записывали результат в свой блокнот на следующую страницу. Могло ли у одного из школьников на десятой странице оказаться число 2020?

Ответ: нет.

Решение. Пусть на первых страницах у школьников были написаны числа a , b , c . Тогда на вторых страницах будут числа $a-b$, $b-c$ и $c-a$; на третьих страницах – числа $a+c-2b$, $a+b-2c$ и $b+c-2a$; на четвертых страницах - числа $3c-3b$, $3a-3c$, $3b-3a$, то есть все числа будут кратны 3. При дальнейших операциях вычитания все результаты будут также кратны 3. То есть и на десятых страницах все числа будут кратны 3. Но число 2020 не делится на 3, поэтому оно получиться не могло.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Рассмотрен один или несколько конкретных примеров трех каких-то конкретных чисел, для них проделаны все операции, число 2020 не получено, на основе этого утверждается, что оно никогда не получится; при этом никаких общих закономерностей не указано – 0 баллов. На основе рассмотрения одного или нескольких примеров замечено, что начиная с некоторой страницы все числа будут кратны трем (но в общем виде не доказано, что такое будет всегда) – 1 балл. Доказано в общем виде, что на четвертой странице все числа будут кратны трем (однако не упоминается, что на последующих страницах тоже все числа будут кратны трем) – 3 балла.

Комментарий. Возможно, кратность трем – не единственное «препятствие» к получению числа 2020. Если школьник смог найти некоторое свойство, которым обладают числа на 10 странице (и доказал этот факт), но этим свойством не обладает число 2020, такое решение может быть верным.

5. В кабинете находится 30 человек, среди которых есть один экстрасенс. Экстрасенс знает дату рождения каждого из остальных, но никто из остальных не знает дату рождения экстрасенса. Вы можете выбрать любых двух человек в кабинете, спросить одного из них, знает ли он дату рождения другого, и получить честный ответ. Можно ли за 29 таких вопросов наверняка найти экстрасенса?

Ответ. Да, можно.

Решение. Пусть мы выбрали людей А и Б и спросили А про день рождения Б. Если получен ответ «знаю», то Б – точно не экстрасенс, а если «не знаю», то А – точно не экстрасенс. Таким образом, за 1 вопрос можно гарантированно выявить человека, не являющегося экстрасенсом. Составим список всех людей, присутствующих в кабинете. Будем каждый раз брать любых двух людей из списка, после чего вычеркивать того из них, кто не является экстрасенсом. Тогда после 29 вопросов мы вычеркнем из списка 29 человек. Оставшийся в списке и есть экстрасенс.

Критерии. Только ответ без продвижений в описании алгоритма, как это возможно – 0 баллов. Попытки доказательства, что невозможно – 0 баллов. Описано, как с помощью одного вопроса выявить одного человека, не являющегося экстрасенсом (без дальнейшего уточнения, как за 29 вопросов вычислить 1 экстрасенса) – 3 балла.

Комментарий. Помимо указанного в решении возможны и другие правильные алгоритмы.