8 класс

1. В корзине лежат фрукты (не менее пяти). Если вытащить наугад три фрукта, то среди них обязательно найдется яблоко. Если вытащить наугад четыре фрукта, то среди них обязательно найдется груша. Какие фрукты могут быть вытащены и в каком количестве, если взять наугад пять фруктов?

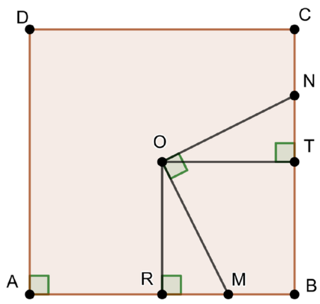
   Решение. Из условия задачи следует, что в коробке «не яблоками» являются не более двух фруктов (иначе можно вытащить 3 фрукта, среди которых не будет яблок). Аналогично, «не грушами» являются не более трех фруктов (иначе можно вытащить 4 фрукта, среди которых не будет груш). Таким образом, в коробке лежит ровно 5 фруктов: три яблока и две груши. Они все и будут вытащены. **Ответ: три яблока и две груши.**

2. В одной вершине куба написано число 2021, а в остальных – нули. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться, чтобы все числа, стоящие в вершинах куба, делились на 2?

   Решение. Вначале сумма чисел, стоявших в вершинах куба, равна 2021, то есть нечётна. Каждый раз мы к двум вершинам добавляем по единице, так что сумма остаётся нечётной. Поскольку сумма восьми целых чисел нечётна (в этой задаче нечётность суммы является инвариантом), то числа во всех вершинах не могут стать чётными. **Ответ: нельзя.**

3. В квадрате $ABCD$ отмечен центр – точка O, а на сторонах AB и BC отмечены точки M и N так, что $\angle MON = 90°$. Докажите, что $MB + BN = AB$.

   Решение. Опустим перпендикуляры из OR и OT на стороны AB и BC. Треугольники ROM и TON равны по стороне и острому углу прямоугольного треугольника. Значит, $RM = TN$ и $MB = RB - RM = \frac{1}{2}AB - RM$, $BN = BT + TN = \frac{1}{2}AB + RM$. Складывая последние выражения, получим что $MB + BN = AB$.



4. Дано натуральное число N. Вера делает с ним следующие операции: сначала прибавляет 3 до тех пор, пока получившееся число не станет делиться на 5 (если изначально N делится на 5, то ничего прибавлять не надо). Получившееся число Вера делит на 5. Далее делает эти же операции с новым числом, и так далее. Из каких чисел такими операциями нельзя получить 1?

   Решение. Это числа вида $3k, k \in \mathbb{N}$. В самом деле, из чисел, кратных 3, число 1 получить не удастся, так как, если число N кратно 3, то и $N + 3$ кратно 3, а если $N = 5k$ кратно 3, то и k кратно 3, поскольку 3 и 5 взаимно простые. А значит, все получающиеся в результате этих операций числа будут кратны 3, но 1 не делится на 3.

   Пусть N не кратно 3. Заметим, что числа N, $N + 3$, $N + 6$, $N + 9$ и $N + 12$ также не кратны 3 и имеют разные остатки при делении на 5, значит, одно из них кратно 5.

Следовательно, после первой операции деления на 5 Вера получит число, не кратное 3 и не превышающее $\frac{N+12}{5} = 0,2N + 2,4$, что строго меньше N при $N > 3$. Иными словами, после каждого деления на 5 эти числа уменьшаются, пока не получится число 1 или 2. Но из числа 2 за два шага также получается число 1.

5. Два фокусника показывают зрителю следующий фокус. У зрителя есть 48 карточек, пронумерованных числами от 1 до 48. Он выбирает из них 25 карточек и передает первому фокуснику. Тот возвращает зрителю две из них. Зритель добавляет к этим двум одну из оставшихся у него 23 карточек и, перемешав, передает эти три карточки второму фокуснику. Как фокусникам договориться, чтобы второй всегда с гарантией мог определить, какую из трех карточек добавил зритель?

   Лемма. Если из 48 карточек с числами 1, 2, 3, ..., 48 выбрать любые 25, то среди них всегда найдется пара с суммой 49.

   Доказательство. Разобьём числа 1, 2, 3, ..., 48 на двадцать четыре пары следующим образом: (1;48), (2;47), (3;46),...,(24;25). Поскольку пар 24, то при выборе 25 чисел обязательно найдутся два числа из одной пары (по принципу Дирихле). А значит из выбранных двадцати пяти чисел всегда найдутся два, дающие в сумме 49.

   Решение. Первый фокусник должен вернуть зрителю две карточки, сумма чисел на которых равна 49 (такая пара у него всегда найдется, см. Лемму). Второй фокусник, зная об этом, безошибочно отличит пару карточек фокусника от карточки зрителя, поскольку из трёх карточек может быть только одна пара с суммой 49.
   Комментарий. В решении отсутствует доказательство утверждения эквивалентного Лемме – не более 4 баллов.