МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 2020-2021 уч. год
8 класс
(4 часа)

1. Из пункта А в пункт Б вышел математик. Вслед за ним через некоторое время вышел физик. Догнав математика через 20 км пути, физик, не останавливаясь, дошёл до пункта Б и повернул обратно. Второй раз они встретились в 20 км от Б. Затем каждый продолжил движение в своём направлении. Дойдя до пунктов А и Б соответственно, они снова повернули и пошли навстречу друг другу. За сколько километров от пункта А они встретятся в третий раз, если расстояние между пунктами А и Б равно 100 км?
   Ответ: 45.
   Решение. От первой встречи до второй встречи математик всего прошел 100 – 20 – 20 =60 км, а физик – 100 – 20 + 20=100 км. Отсюда ясно, что отношение их скоростей равно 6:10 или 3:5. От второй до третьей встречи они пройдут вместе 100+100=200 км, при этом математик пройдёт $\frac{3}{8}$, а физик $\frac{5}{8}$ этого расстояния, то есть математик пройдёт 75 км. Значит, он сначала пройдёт оставшихся 20 км до пункта Б, а затем, повернув обратно, пройдёт ещё 75 – 20=55 км. Поэтому он окажется в 100 – 55=45 км от пункта А.
   Критерии.
   Если неверное решение – 0 баллов.
   Если верно составлена система уравнений – 3 балла.
   Если допущена вычислительная ошибка – 5 баллов.
   Если верное решение – 7 баллов.

2. На турнир приехали школьники из разных городов. Один из организаторов заметил, что из них можно сделать 19 команд по 6 человек, и при этом ещё менее четверти команд будут иметь по запасному игроку. Другой предложил сделать 22 команды по 5 или 6 человек в каждой, и тогда более трети команд будут состоять из шести игроков. Сколько школьников приехало на турнир?
   Ответ: 118.
   Решение. Из условия «можно сделать 19 команд по 6 человек, и при этом ещё менее четверти команд будут иметь по запасному игроку» следует, что школьников не более 19×6+4=118. Из условия «предложил сделать 22 команды по 5 или 6 человек в каждой, и тогда более трети команд будут состоять из шести игроков», то всего учеников будет не менее 22×5+8=118. Отсюда следует, что школьников на турнире ровно 118.
   Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
   Только верный ответ – 1 балл.
   Если верное решение – 7 баллов.

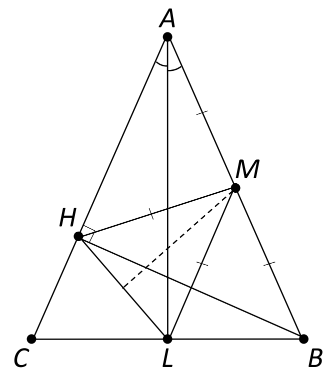
3. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может найти два таких последовательных четырёхзначных натуральных числа, которые при приписывании одного из них к другому справа образуют восьмизначное число, кратное 73. Могут ли его слова быть правдой?
   Ответ: Не могут.

Решение. Если справа к четырёхзначному числу A приписать одно из чисел $A - 1$ или $A + 1$, то получится восьмизначное число $10000\cdot A+(A\pm1)=10001\cdot A \pm 1 = 73\cdot 137\cdot A \pm 1$, которое не делится на 73.

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Только верный ответ – 0 баллов.
Рассмотрение частных случаев – 0 баллов.
Если верное решение – 7 баллов.

4. В треугольнике ABC проведены биссектриса AL и высота BH. Оказалось, что серединный перпендикуляр к отрезку LH пересекает сторону AB в её середине. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

Решение. Пусть M – середина стороны AB (см. рис.). Тогда из прямоугольного треугольника ABH получаем $HM = \frac{1}{2}AB$. Так как точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку LH, то $LM = HM = \frac{1}{2}AB$. Следовательно, треугольник ABL – прямоугольный и $AL \perp BC$. Таким образом, AL является биссектрисой и высотой в треугольнике ABC, поэтому данный треугольник – равнобедренный.



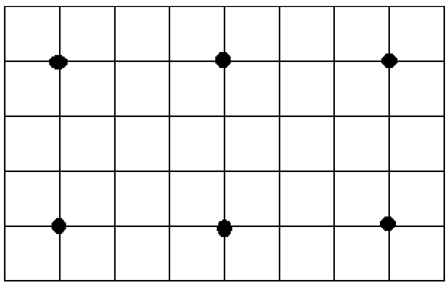
Критерии.
Если неверное решение – 0 баллов.
Если верное решение – 7 баллов.

5. Центр города представляет из себя прямоугольник 5×8 км, состоящий из 40 кварталов размером 1×1 км, границы которых – улицы, образующие 54 перекрестка. Какое наименьшее количество полицейских необходимо поставить на перекрестках так, чтобы до каждого из перекрестков какой-то из полицейских мог бы добраться, проехав на машине не более 2 км по улицам города?

Ответ. 6 полицейских.

Решение. Оценка. Рассмотрим перекрёстки на границе. Их всего 26. Каждый полицейский может контролировать не более 5 перекрёстков (если он сам находится на границе, то ровно 5, если он находится внутри города, то на каждой стороне не более 3 и в углу не более 5). Значит, необходимо не менее 6 полицейских.

Пример (см. рис).



Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если построен только пример – 2 балла.
Если доказана только оценка – 4 балла.
Если верное решение (есть и пример, и оценка) – 7 баллов.