8 класс

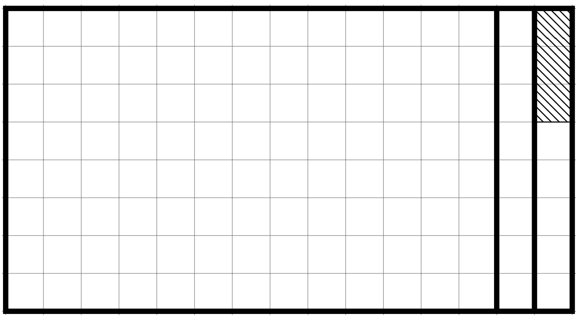
Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

1. Можно ли, используя знаки «$+$», «$-$», «$\cdot$» и несколько выражений a^4 и a^6-1, получить a^6?

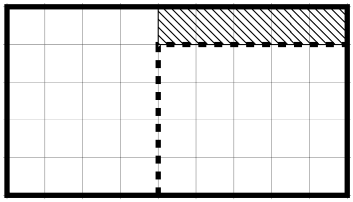
Решение. Да, $-(a^6-1)\cdot(a^6-1)-(a^6-1)+a^4\cdot a^4\cdot a^4=a^6$.

2. Можно ли вырезать из прямоугольника 15×8 три клеточки и провести в полученной фигуре два прямолинейных разреза так, чтобы из полученных частей можно было сложить прямоугольник?



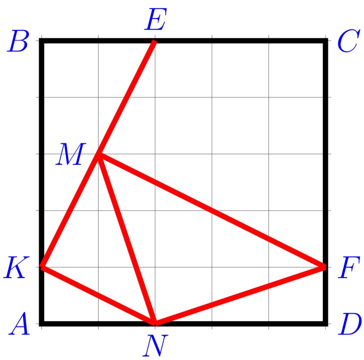
Решение. Да, можно.

3. Клетчатый прямоугольник 5×9 Петя разрезает на две части по границам клеток так, чтобы линия разреза имела форму буквы «Г» — состояла из двух перпендикулярных друг другу отрезков. Вася также поступает с любой из двух получившихся фигур, потом Петя — с одной из трех получившихся и т.д. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает — Петя или Вася — как бы не играл другой?



Решение. Выиграет Петя. Петя сделает первый разрез так, как показано на рисунке. Дальше фигура распадается на две части, причем одна из них имеет несущественный для игры заштрихованный прирост. Дальше Петя применяет симметричную стратегию: на всякий ход второго в одном из прямоугольников отвечает таким же ходом в другом.

4. Дан квадрат $ABCD$. Точка N лежит на стороне AD, причём $AN : ND = 2 : 3$, точка F лежит на стороне CD и $DF : FC = 1 : 4$, точка K лежит на стороне AB, причём $AK : KB = 1 : 4$. Найдите угол KNF.



Решение. Отметим точку E на стороне BC так, что $BE : EC = 2 : 3$. Пусть M — середина KE. Тогда $\triangle KMN$ — равнобедренный прямоугольный и $\triangle MNF$ — равнобедренный треугольник. Следовательно, $\angle KNF = \angle KNM + \angle MNF = 45° + 90° = 135°$.

5. Можно ли на некоторые клетки шахматной доски расставить шашки так, чтобы на каждой горизонтали, на каждой вертикали и на каждой диагонали (любой длины, даже состоящей из одной клетки) стояло нечетное количество шашек?

Решение. Расставим шашки на все поля. Рассмотрим диагонали шахматной доски. Закрашенные и не закрашенные диагонали общих клеток не имеют, поэтому достаточно рассмотреть только диагонали одного цвета. Пусть это будут закрашенные диагонали. Имеем нечетное количество диагоналей с четным числом закрашенных клеток и четное количество диагоналей с нечетным числом закрашенных клеток.

Предположим, что шашки таким образом расставить можно. Тогда из всех диагоналей с четным количеством нужно убрать хотя бы по одной шашке. У нас имеется 7 диагоналей с четным количеством клеток. Это значит, что нужно убрать хотя бы 7 шашек.

Чтобы на диагоналях с нечетным количеством четность сохранилась, нужно убирать четное количество шашек с каждой такой диагонали. Значит, убранных шашек должно быть хотя бы 8. Если мы уберем 8 шашек, то из 7 диагоналей с четным количеством клеток, найдется та, где нужно будет взять хотя бы 2 шашки, что не изменит четность этой диагонали.

Рассуждая дальше аналогично, приходим к тому, что это сделать невозможно.