8 класс

8.1. Расшифруйте следующий ребус (восстановите в примере цифры, заменённые звездочками):

```
_******* | **
 ***       **8**
   _**
    **
    _***
     ***
       0
```

Ответ:

```
_1089708 | 12
 108       90809
   _97
    96
    _108
     108
       0
```

Решение. Вторая и четвертая цифра в частном равны 0, так как во втором и третьем делении сносились дополнительные числа. Так как при умножении двузначного числа на 8 получилось двузначное, то делитель равен либо 10, либо 11, либо 12, а поскольку при умножении на первую цифру частного получилось трёхзначное число, то делитель равен 12, а первая цифра частного равна 9, потому что только при умножении на 9 получится трехзначное число. Проведя такие же рассуждения с последней цифрой частного, получим, что она также равна 9:

```
_******* | 12
 ***       90809
   _**
    **
    _***
     ***
       0
```

Зная частное и делитель, восстановим делимое – 1089708. Остальные пропуски заполним в процессе деления.

Комментарии. 2 балла за ответ, найденный подбором без объяснения и обоснования единственности.

8.2. Петя пришел сегодня из школы домой в 16:45, посмотрел на часы и задался вопросом: через какое время стрелки на часах будут находиться в одном положении в седьмой раз с момента его прихода со школы?

Ответ: 435 минут.

Решение. Скорость движения минутной стрелки 12 делений/час (под одним делением здесь подразумевается расстояние между соседними цифрами на циферблате часов), а часовой — 1 деление/час. До седьмой встречи минутной и часовой стрелок минутная должна сначала 6 раз «обогнать» часовую, то есть пройти 6 кругов по 12 делений. Пусть после этого до седьмой встречи часовая стрелка пройдет L делений. Тогда общий путь минутной стрелки складывается из найденных 72 делений, ещё 7,75 изначально разделяющих их делений (поскольку часы показывают 4 часа 45 минут) и последних L делений. Приравняем время движения часовой и минутной стрелок:

$$\frac{L}{1}=\frac{L+72+7,75}{12}\Leftrightarrow 12L=L+79,75\Leftrightarrow L=7,25.$$

Часовая стрелка пройдет 7,25 делений, что соответствует 7,25 часам, то есть 435 минутам.

8.3. Найдите все целые неотрицательные решения уравнения

$$2x^2+2xy-x+y=2020$$

Ответ: $x=0$, $y=2020$; $x=1$, $y=673$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$y(2x+1)=2020-2x^2+x.$$

При целых значениях x выражение $(2x+1)\neq 0$, поэтому, разделив его на $2x+1$ и выделив целую часть, получим:

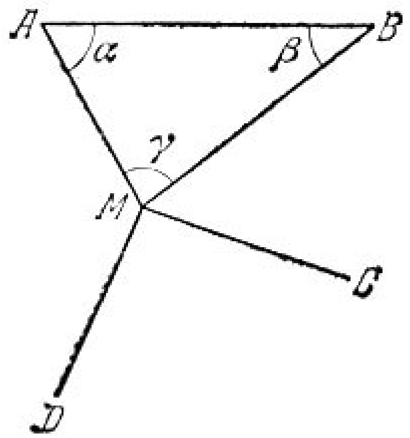
$$y=\frac{2019}{2x+1}-x+1$$

Чтобы y было целым числом $2x + 1$ должно быть делителем 2019. Перебирая положительные делители числа 2019, рассмотрим четыре случая: $2x + 1 = 1; 3; 673; 2019$. Только в двух из них получаем две пары целых неотрицательных решений: (0, 2020), (1; 673).

Комментарии. 2 балла за ответ, найденный подбором без обоснования.

8.4. На плоскости расположено 20 точек, расстояние между любыми двумя из которых различны. Соединим отрезком каждую точку с ближайшей. Докажите, что ни одна точка не будет соединена более чем с пятью соседними.

Решение. Предположим, что точка *M* соединен отрезками *MA*, *MB*, *MC*, *MD*, ... с точками *A, B, C, D*, ...



Соединим отрезком точки *A* и *B*. Имеем $AM < AB$ и $BM < AB$, так как в противном случае вместо по крайней мере одного из соединений *AM* и *BM* имело бы место соединение *AB*.

В треугольнике *AMB* из неравенств $AM < AB$ и $BM < AB$ следуют неравенства $\gamma > \alpha$ и $\gamma > \beta$. Складывая эти неравенства и еще равенство $\gamma = \gamma$, получаем

$$3\gamma > \alpha + \beta + \gamma \text{ или } 3\gamma > 180^\circ,$$

следовательно, $\gamma > 60^\circ$.

Заметим, что если точки *A, M, B* лежат на одной прямой, то $\gamma = 180^\circ$.

Коль скоро, имеет место неравенство $\gamma > 60°$, то в точке M могут сходиться вершины самое большее 5 треугольников, что и требовалось доказать.

8.5. Мирон и Варя играют в следующую игру. На столе лежит куча из 32 камней. Игроки делают ходы поочерёдно, а начинает Мирон. Делая ход, играющий делит любую кучку, в которой больше одного камня, на несколько равных кучек. Побеждает тот игрок, у которого нет возможности сделать ход (перед его ходом в каждой кучке ровно по одному камню). Кто победит при правильной игре обоих игроков?

Ответ: Варя.

Решение. Выигрывает Варя независимо от того, какие ходы будут делать игроки. Так как у числа 32 нет нечётного делителя, то каждый игрок на своём ходу будет разделять одну кучку на чётное количество кучек, и количество кучек будет менять чётность. Перед ходом Мирона всегда будет нечётное число кучек, а перед ходом Вари – чётное. Так как в конце перед победителем окажется 32 единичные кучки, то победитель – Варя.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 балл.