Задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020-2021 учебный год
8 класс

Продолжительность олимпиады: 240 минут. Максимальное возможное количество баллов: 35

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
4-5	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача 1 (7 баллов).
Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?
Ответ: 1;2;3
Решение: Так как стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку в остальные шесть выстрелов, то за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмерку и девятку) он наберет 24 очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела надо набрать 26 очков. Что возможно при единственной комбинации 8+9+9=26. Итак, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку – 2 раза, в девятку – 3 раза.

Задача 2 (7 баллов).
Замените в выражении $(x^4-3)^2+\left(x^3+*\right)^2$ звёздочку (*) на одночлен так, чтобы после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых получилось четыре слагаемых**.**
Ответ: например, 3x, возможен другой правильный ответ.
Решение.
Заменим * на 3x:
$(x^4 - 3)^2 + (x^3 + 3x)^2 = x^8 - 6x^4 + 9 + x^6 + 6x^4 + 9x^2 = x^8 + x^6 + 9x^2 + 9$
Возможен и другой ответ. Например, $\sqrt{6}x^2$

Анализ решения: После раскрытия первой скобки образуются три слагаемых: x^8; $-6x^4$; 9.
Посмотрим, как может измениться сумма после раскрытия второй скобки:
1) если сумма во второй скобке равна 0, то слагаемых будет только три.
2) Если сумма во второй скобке является ненулевым одночленом (т.е. * заменена на одночлен вида ax^3, где $a \neq -1$), то к общей сумме добавится одночлен степени 6, а так как среди имеющихся таких нет, то получится 4 слагаемых: x^8, $-6x^4$, 9, $(a+1)^2x^6$
3) Если степень одночлена не равна 2, то после возведения второй скобки в квадрат появится еще три слагаемых, итого получится шесть слагаемых. Чтобы после приведения подобных их осталось 4, либо одно из трех новых слагаемых должно

сократиться с одним из трех имеющихся, либо степени двух слагаемых из первой тройки должны совпадать с двумя слагаемыми из второй.

Таким образом, * можно заменить на одночлены ax^3, $a \neq -1$, $-x^5/2$, $3x$, $\sqrt{6}x^2$ и во всех этих случаях после приведения подобных слагаемых итоговая сумма будет состоять из 4 слагаемых. Заметим, что это будет сумма с положительными коэффициентами только в случае замены * на $3x$ или $\sqrt{6}x^2$

Критерии проверки:

- Для правильного решения достаточно привести один верный ответ и проверить, что он подходит – 7 баллов.
- Найден одночлен, но не объяснено, почему он является решением – 2 балла.

Задача 3 (7 баллов).

В 8 "А" классе хватает двоечников, но Стёпочкин учится хуже всех. Педсовет решил, что либо Стёпочкин должен к концу четверти исправить двойки, либо его исключат. Если Стёпочкин исправит двойки, то в классе будет 24% двоечников, а если его выгонят, то двоечников станет 25%. Какой процент двоечников в 8 "А" сейчас?

Ответ: 28%

Решение.

Пусть сейчас в классе x учеников. По условию $0{,}24x = 0{,}25(x-1)$, то есть $0{,}01x = 0{,}25$.
Значит, $x = 25$. Один человек составляет 4% от 25, поэтому сейчас в классе
24 + 4 = 28% двоечников.

Задача 4 (7 баллов).

Около окружности описан четырёхугольник. Его диагонали пересекаются в центре этой окружности. Докажите, что этот четырёхугольник - ромб.

Решение.

Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром O.
Если диагональ AC проходит через точку O, то прямая AC является осью симметрии четырёхугольника, поэтому $AB=AD$ и $CB=CD$.
А если диагональ BD проходит через точку O, то $BA=BC$ и $DA=DC$.

Задача 5 (7 баллов)

Докажите, что если $0 < a_1 < a_2 < ... < a_8 < a_9$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$$

Решение.

Сложим неравенства $a_1 < a_3$, $a_2 < a_3$, $a_3 \leq a_3$.
Получим $a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3$.
Аналогично, $a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6$ и $a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9$.
Складывая эти три неравенства, получаем $a_1 + ... + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$.
Осталось разделить обе части на $a_3 + a_6 + a_9$.