Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2020/21 учебный год

8 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

По прогнозу экспертов цены на квартиры в Москве через год упадут в рублях на 20 %, а в евро – на 40 %. В Сочи через год цены на квартиры в рублях упадут на 10 %. На сколько упадут цены на квартиры в Сочи в евро? Предполагается, что курс евро по отношению к рублю (т. е. стоимость одного евро в рублях) один и тот же в Москве и в Сочи, однако он может меняться с течением времени. Ответ обосновать.

Решение. Рассмотрим равноценные по стоимости квартиры в Москве и в Сочи, пусть стоимость любой из них равна a рублей, что соответствует b евро. Через год стоимость квартиры в Москве станет равной 0,8 рублей, что равно $0{,}6b$ евро. Отсюда a рублям через год будет соответствовать $3b/4$ евро. В Сочи квартира станет стоить $0{,}9a$ рублей. Найдём её цену в евро. Так как в каждый момент времени отношение стоимости рубля к стоимости евро одно и то же для любого региона, то $0{,}9a = 2{,}7b/4 = 0{,}675b$. Значит, цена на квартиру в Сочи упадёт на $0{,}325b$ евро, т. е. на 32,5 %.

Ответ: на 32,5 %.

2. УСЛОВИЕ

Три числа *x,y,z* удовлетворяют соотношению $x^2 + y^2 = xy\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Докажите, что хотя бы одно из чисел x или y равно произведению двух других чисел.

Решение. По условию

$$x^2 - xyz + y^2 - \frac{xy}{z} = 0,$$

$$x(x - yz) - y\left(\frac{x}{z} - y\right) = 0,$$

$$x(x - yz) - \frac{y}{z}(x - yz) = 0,$$

$$(x - yz)\left(x - \frac{y}{z}\right) = 0.$$

Поэтому обязательно либо $x - yz = 0$, либо $x - \dfrac{y}{z} = 0$, т.е. $y - xz = 0$.

3. УСЛОВИЕ

Какую градусную меру может иметь средний по величине угол треугольника?

Решение. Пусть α, β, γ – углы треугольника, $\alpha \le \beta \le \gamma$. Разумеется, $\beta > 0^{\circ}$. Оценим β сверху: $2\beta \le \beta + \gamma < \alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$, $\beta < 90^{\circ}$. Далее следует объяснить (привести пример), почему для любого β, $0^{\circ} < \beta < 90^{\circ}$, существует треугольник, средний по (величине) угол которого равен β. Рассмотрим угол $\alpha = \min\{\beta, 90^{\circ} - \beta\}$. Имеем: $\alpha > 0^{\circ}$, $\alpha \le \beta$ и $\alpha + \beta \le 90^{\circ} - \beta + \beta = 90^{\circ}$.
Тогда $\gamma = 180^{\circ} - (\alpha + \beta) \ge 180^{\circ} - 90^{\circ} = 90^{\circ} > \beta$. Треугольник с углами α, β, γ дает нам подходящий пример.

Ответ: любую от 0° до 90°.

4. УСЛОВИЕ

Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяет соотношениям $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3}$ при $n = 4,5,6,\ldots$ Найдите a_{2019}, если известно, что $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$.

Решение. Ясно, что все члены этой последовательности равны ± 1. Находим:

$$a_n = (a_{n-1}) \cdot a_{n-3} = (a_{n-2} \cdot a_{n-4}) \cdot a_{n-3} = (a_{n-2}) \cdot a_{n-4} \cdot a_{n-3} =$$
$$= (a_{n-3} \cdot a_{n-4}) \cdot a_{n-4} \cdot a_{n-3} = a_{n-3}^2 \cdot a_{n-4} \cdot a_{n-5} = a_{n-4} \cdot a_{n-5} =$$
$$= (a_{n-4}) \cdot a_{n-5} = (a_{n-5} \cdot a_{n-7}) \cdot a_{n-5} = a_{n-5}^2 \cdot a_{n-7} = a_{n-7}$$

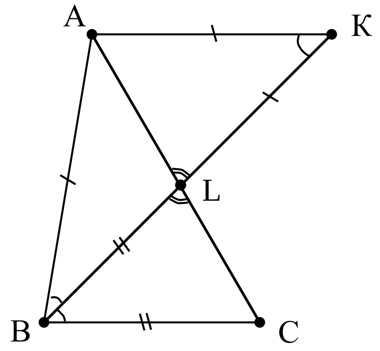
Т. е. последовательность периодична с периодом 7. Поэтому

$$a_{2019} = a_{288 \cdot 7 + 3} = a_3 = -1.$$

5. УСЛОВИЕ

В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, и на её продолжении за точку L выбрана точка K, для которой $LK = AB$. Оказалось, что прямая AK параллельна прямой BC. Докажите, что $AB > BC$.

Доказательство. См. рис.



Угол AKB равен KBC (так как $AK \parallel BC$, BK – секущая). Поэтому треугольник BAK – равнобедренный. Значит, $AK = AB$. Но тогда в треугольнике LKA равны две стороны $AK = KL$ $(= AB)$. Треугольник LBC подобен треугольнику LKA, следовательно, он равнобедренный и $BL = BC$. Теперь получаем

$AB + AK > BK = BL + LK$, т.е. $AB + AB > BC + AB$,
откуда $AB > BC$, ч.т.д.

6. По окружности выписано 100 целых чисел, сумма которых равна 1. Цепочкой назовем несколько чисел (возможно, одно), стоящих подряд. Найдите количество цепочек, сумма чисел в которых положительна.

Ответ: 4951.

Решение. Разобьём все цепочки (кроме цепочки, состоящей из всех чисел) на пары, дополняющие друг друга. Если сумма чисел в одной из цепочек пары равна *s*, а во второй равна *t*, то *s* + *t* = 1. Поскольку числа *s* и *t* целые, то положительным из них является ровно одно. Значит, ровно половина всех цепочек имеет положительную сумму. Всего цепочек $100 \cdot 99$ (две дополняющие друг друга цепочки определяются выбором двух мест между ними). Это даёт нам 4950 цепочек с положительной суммой. Добавим к ним еще цепочку из всех чисел.