Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2020 г.)

9 класс

1. Докажите, что выражение $x^5 - 4x^4y - 5y^2x^3 + 20y^3x^2 + 4y^4x - 16y^5$ не равно 77 ни при каких целых значениях x и y.

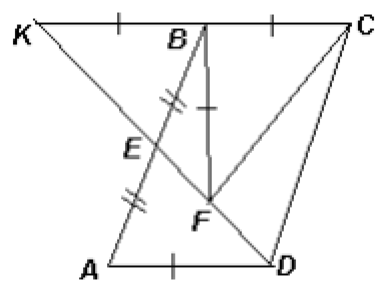
Решение: Разложим на множители данное выражение:

$$x^5 - 4x^4y - 5y^2x^3 + 20y^3x^2 + 4y^4x - 16y^5 = x^4(x - 4y) - 5x^2y^2(x - 4y) + 4y^4(x - 4y) =$$
$$= (x - 4y)(x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4) = (x - 4y)(x + 2y)(x - y)(x + y).$$

Необходимо проверить, что множители попарно различны. Они могут совпадать при y = 0. Но x^5 ни при каких целых значениях переменной не равно 77. При этом число 77 может быть разложено в произведение максимум четырёх различных сомножителей, например, 1x(-1)x7x(-11). Но не пяти. Что и требовалось доказать.

2. Точка E – середина стороны AB параллелограмма ABCD. На отрезке DE нашлась такая точка F, что AD = BF. Найдите величину угла CFD.

Решение: Продолжим DE до пересечения с прямой BC в точке K (см. рисунок). Так как BK || AD, то ∠KBE = ∠DAE. Кроме того, ∠KEB = ∠DEA и AE = BE, значит, равны треугольники BKE и ADE. Тогда BK = AD = BC.



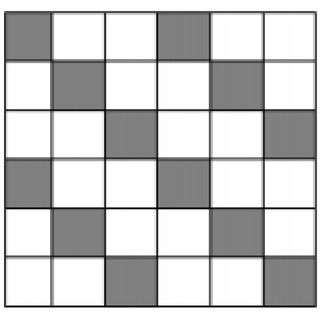
Таким образом, в треугольнике CFK медиана FB равна половине стороны, к которой она проведена, поэтому этот треугольник – прямоугольный с прямым углом F. Следовательно, и угол CFD – прямой.

Ответ: 90°.

3. Какое наименьшее количество клеток на доске 6x6 надо закрасить, чтобы при любом расположении (можно поворачивать и переворачивать) фигуры из 4 клеток в виде буквы Г на доске, нашлась хотя бы одна закрашенная клетка?

Решение: Рассмотрим прямоугольник 2x3. В нём, очевидно, необходимо закрасить минимум клетки. Разобьем доску 6x6 на 6 прямоугольников 2x3 в каждом нужно закрасить минимум 2 клетки, тогда всего нужно закрасить хотя бы 12 клеток. Пример с 12 клетками приведен на рисунке.

Ответ: 12.



4. Пусть $f(x) = x^2 + bx + c$. Известно, что дискриминант квадратного уравнения $f(x) = 0$ равен 2020. Сколько корней имеет уравнение $f(x - 2020) + f(x) = 0$?

Решение: Поскольку расстояние между корнями равно D, то уравнения f(x) = 0 и f(x – D) = 0 имеют общий корень. Если начертим графики этих функций, то они пересекут ось ox в общей точке (этом корне). Вертикальная прямая, проходящая через эту точку, является осью симметрии этого чертежа, а значит и для графика суммы. Поэтому этот корень – единственный. Существует и чисто вычислительное решение этой задачи

Ответ: один.

5. Можно ли найти два таких натуральных числа *x* и *y*, что сумма этих чисел на 2021, меньше суммы их НОД и НОК?

Решение: Другими словами нам нужно выяснить, имеет ли уравнение НОД(x,y) + НОК(x,y) – (x + y) = 2021 решение на множестве натуральных чисел. Запишем это уравнение в виде НОД(x,y) + НОК(x,y) + x + y = 2021. Проанализируем полученное уравнение с точки зрения чѐтности. Если оба числа x и y чѐтные, то их НОД и НОК также чѐтные, и сумма четырѐх слагаемых (чѐтных чисел) тоже должна быть чѐтной. Если они оба нечѐтные, то их НОД и НОК нечѐтные, а сумма четырех нечѐтных – чѐтная. Наконец, если одно из чисел x, y чѐтное, а второе нет, то НОД нечѐтен, а НОК – чѐтное, сумма также чѐтная. Таким образом, нужных чисел и не существует.

Ответ: Не существуют.