

9 класс

Задача 9.1 (7 баллов)

Каждый участник олимпиады заполнил по две анкеты и положил их в любые две из 4 стопок листов на столе. Изначально в стопках было 2, 3, 1 и 1 листов. Может ли в итоге оказаться в каждой стопке поровну листов?

Решение:

Начальная сумма листов 7, каждый раз она меняется на 2, и остаётся нечётной и никогда не станет кратной 4.

Критерии	баллы
Полное решение	7
Ответ без обоснования	0

Ответ: не может

Задача 9.2 (7 баллов)

В мешке 70 шаров, отличающихся только цветом: 20 красных, 20 синих, 20 жёлтых, остальные – чёрные и белые.

Какое наименьшее число шаров надо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них было не менее 10 шаров одного цвета?

Решение:

Вынув 37 шаров, мы рискуем получить по 9 красных, синих и жёлтых, и десяти шаров одного цвета не будет. Если же мы вытащим 38 шаров, то общее число красных, синих и жёлтых среди них не меньше 28, и шаров одного из этих цветов – не меньше десяти (поскольку $28 > 3 \cdot 9$).

Критерии	баллы
Полное решение	7
Ответ без обоснования	1
Неверный ответ	0

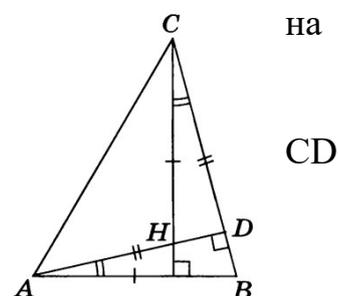
Ответ: 38 шаров

Задача 9.3 (7 баллов)

H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC . Известно, что $HC = BA$. Найдите угол ACB .

Решение:

Пусть D — основание высоты, опущенной из вершины A сторону BC . Углы HCB и DAB равны как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, $\triangle CHD = \triangle ABD$ (по гипотенузе и острому углу). Поэтому $CH = AD$, т. е. треугольник ACD равнобедренный и прямоугольный, следовательно, $\angle ACB = 45^\circ$.



Критерии	баллы
Полное решение	7
Доказано $\triangle CHD = \triangle ABD$	5
Доказано $\angle HCB = \angle DAB$	3
Верный ответ без обоснования	1

Ответ: $\angle ACB = 45^\circ$

Задача 9.4 (7 баллов)

Палиндром - число, буквосочетание, слово или текст, одинаково читающееся в обоих направлениях. Сколько времени в течение суток на табло часов горят палиндромы, если часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59?

Решение:

Если на табло горят цифры $ab.cd.mn$ то $a = 0, 1, 2, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 5, 0 \leq d \leq 9, 0 \leq m \leq 5, 0 \leq n \leq 9$. Поэтому если $a = n, b = m, c = d$ то симметричное число на табло однозначно определяется по цифрам a, b и c , где $a = 0, 1, 2; 0 \leq b \leq 5; 0 \leq c \leq 5$. При этом если $a = 0$ или 1 , то b и c — любые цифры от 0 до 5, количество таких наборов чисел равно $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$. Если же $a = 2$, то $b = 0, 1, 2, 3; 0 \leq c \leq 5$ количество таких наборов равно $4 \cdot 6 = 24$. Всего $72 + 24 = 96$ наборов чисел, каждый из которых горит 1 секунду.

Критерии	баллы
Полное решение	7
Верный ход решения с арифметической ошибкой	5
Верно указаны числовые промежутки для a, b, c .	3
Верный ответ без обоснования	1

Ответ: 96 секунд

Задача 9.5 (7 баллов)

В магазине есть пуговицы шести цветов. Какое наименьшее количество пуговиц надо купить, чтобы их можно было пришить в ряд, так чтобы для любых двух различных цветов в ряду нашлись две соседние пуговицы этих цветов?

Решение:

Из условия следует, что для каждого фиксированного цвета A пуговица этого цвета должна встретиться в паре с пуговицей каждого из остальных 5 цветов. В ряду пуговица имеет не более двух соседей, поэтому пуговица цвета A должна встретиться не менее 3 раз. Аналогично с каждым другим цветом. Таким образом, всего должно быть не менее $3 \cdot 6 = 18$ пуговиц. Вот один из примеров искомого расположения пуговиц: 123456246325164135 (цифрами обозначены цвета).

Критерии	баллы
Полное решение	7
Оценка количества пуговиц без примера	4
Пример без оценки количества	3
Неверное решение	0

Ответ: 18 пуговиц