

Решения задач 9 класс

1. Ответ: нет. Из трех последовательных целых чисел по крайней мере два имеют суммы цифр, являющиеся последовательными целыми числами (в данном случае возможен лишь один переход в следующий разряд). Но два последовательных целых не могут быть квадратами одновременно.
Рекомендации по оценке: только ответ – 0 баллов.

2. Пусть b – больший из двух катетов. По условию $\frac{b}{a} < 2$. Тогда:

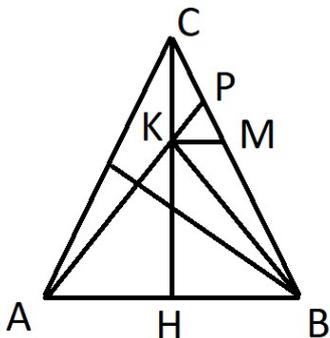
$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + c^2} &> \frac{a^2}{b^2 + a^2 + b^2} + \\ &+ \frac{b^2}{a^2 + a^2 + b^2} > \\ \frac{a^2}{2b^2 + a^2} + \frac{b^2}{2a^2 + b^2} &> \frac{1}{2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1} + \\ + \frac{b^2}{2b^2 + b^2} &> \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

3. Шесть команд сыграли в общей сложности $6 \cdot 5/2 = 15$ игр. Количество игр совпадает с суммой количеств побед, одержанных каждой командой. Но если каждая команда одержала меньше трех побед, то общее число игр не превосходит $2 \cdot 6 = 12$. Противоречие.

4. Ответ: да, можно. Поскольку на доске уже присутствуют числа 20 и 21, мы можем получить любое число вида $20a + 21b$. Заметим, что $2020 = 101 \cdot 20 = (101 - 21) \cdot 20 + 21 \cdot 20 = 20 \cdot 80 + 21 \cdot 20$.

Рекомендации по оценке: только ответ – 0 баллов.

5. Ответ: 1:4. Так как прямая s и медиана делят высоту на три равные части, то высота точкой пересечения с медианой делится в отношении 2:1, считая от ее вершины, то есть высота из вершины C является также и медианой равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$).



Пусть прямая s пересекает высоту CH в точке K , сторону BC в точке P . Заметим, что треугольник AKB также равнобедренный. Отметим на стороне BC точку M так, что KM параллельна AB .

Угол PKB равен сумме углов KAB и KBA . Т.к. KM параллельна AB , то KM является биссектрисой угла PKB . Треугольники $СКМ$ и $СНВ$ подобны с коэффициентом 3, поэтому $KM = AB/6$. Поэтому треугольники

РКМ и РАВ подобны с коэффициентом 6, то есть $РК:ВК = 1:5$, т.е. $РМ:МВ = 1:5$. Обозначим $x=СР$, $y=РМ$. Тогда с одной стороны $ВМ=2*(x+y)$, с другой $ВМ=5y$. Откуда $2x=3y$, а, значит, $СР:РВ = x/(6y) = (3/2)/6 = 1:4$.

Рекомендации по оценке:

только ответ – 0 баллов

доказано, что АВС равнобедренный – 2 балла

проведена КМ, и доказано, что КМ является биссектрисой угла РКВ – 2 балла