9-й класс

9.1 Для четырех попарно различных чисел x, y, s, t выполнено равенство $\frac{x+s}{x+t} = \frac{y+t}{y+s}$. Найдите сумму всех четырех чисел.

Решение.

$(x+s)(y+s) = (x+t)(y+t),$

$xy + xs + ys + s^2 = xy + xt + yt + t^2,$

$xs - xt + ys - yt + s^2 - t^2 = 0,$

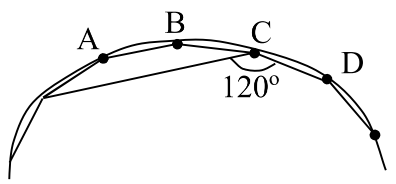
$x(s-t) + y(s-y) + (s+t)(s-t) = 0,$

$(s-t)(x+y+s+t) = 0.$

Так $s \neq t$, то $x+y+s+t = 0$.

9.2 Точки A,B,C,D − подряд идущие вершины правильного n-угольника. Чему равно n, если $\angle ACD = 120^o$?

Решение. Данный n-угольник рассматриваем как вписанный.



Каждая малая дуга между соседними вершинами составляет $\frac{1}{n} \cdot 360^o$. Угол ACD − вписанный и опирается на дугу, состоящую суммарно из $n-3$ малых дуг, т.е. на дугу $(n-3) \cdot \frac{1}{n} \cdot 360^o$. Поэтому $\angle ACD = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-3}{n} \cdot 360^o = \frac{n-3}{n} \cdot 180^o$. По условию $\frac{n-3}{n} \cdot 180^o = 240^o$. Находим $n = 9$.

9.3 Пусть a, b, c −такие целые неотрицательные числа, что $28a + 30b + 31c = 365$. Докажите, что $a + b + c = 12$.

Решение. Если бы было $a + b + c \leq 11$, то было бы $28a + 30b + 31c \leq 31(a+b+c) \leq 31 \cdot 11 < 365$. Значит, $a + b + c \geq 12$. Покажем, что неравенство $a + b + c \geq 13$ также исключается. Для этого заметим, что в силу равенства $28a + 30b + 31c = 365$ число c нечетно (иначе левая часть равенства представляла бы четное число, в то время как 365 − число нечетное). Поэтому $c \geq 1$. Далее, если $a + b + c \geq 13$, то получим

$28a + 30b + 31c = 28(a+b+c) + 2b + 3c \geq 28 \cdot 13 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 267 -$ слишком много! Стало быть, $a + b + c \leq 12$. Окончательно, $a + b + c = 12$.

9.4 Докажите, что если m и n − натуральные числа, $\mathrm{m} < \mathrm{n}$, то

$$m^2 + \sqrt{m^2 + m} < n^2 - \sqrt{n^2 - n}.$$

Решение. Требуется доказать неравенство

$$n^2 - m^2 > \sqrt{n^2 - n} + \sqrt{m^2 + m}.$$

Заметим, что условие $m > n$ с натуральными m и n дает неравенство $n - m \geq 1$. Поэтому $n^2 - n \geq m^2 + m$ (в самом деле, $n^2 - m^2 - (n+m) = (n+m)(n-m-1) \geq 0$). Стало быть, нам достаточно доказать, что

$$n^2 - m^2 > 2\sqrt{n^2 - n}\,.$$

Получаем:

$$n^2 - m^2 \geq n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1,$$

и теперь проверяем выполнение неравенства

$$2n - 1 > 2\sqrt{n^2 - n}.$$

Например, возведением в квадрат (обе части неравенства положительны):

$$4n^2 - 4n + 1 > 4n^2 - 4n.$$

Это верно. Задача решена.

9.5 Петя и Вася по очереди ломают палку: сначала Петя − на две части (возможно, неравные), затем Вася − одну из получившихся частей на две, Петя − одну из трех частей на две, и так далее. Выигрывает тот, кто сможет после своего хода выбрать из всех имеющихся частей четыре палки, длины которых образуют арифметическую прогрессию. Как закончится игра при наилучших действиях сторон?

Примечание. Четыре числа a_1, a_2, a_3, a_4 образуют арифметическую прогрессию, если $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3$.

Решение. Выигрывает первый, т.е. Петя, действуя следующим образом. Первым ходом он разломит палку пополам − получается две палки, каждая длиной, скажем, 2ℓ. Второй ход за Васей, он разломит одну палку длины 2ℓ на две − длиной $\ell - p$ и $\ell + p$. Следующий ход − Петин, этим ходом он уже может организовать победную арифметическую прогрессию, разламывая вторую палку длиной 2ℓ. На какие куски? Один длиной $\ell - x$, другой − длиной $\ell + x$. При этом x следует выбрать так, чтобы получилась арифметическая прогрессия $\ell - p$, $\ell - x$, $\ell + x$, $\ell + p$. Подходит $x = \dfrac{p}{3}$. Задача решена.