Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2020-2021 уч.год

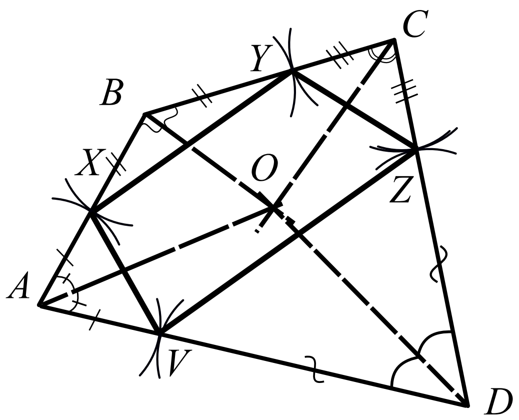
9 класс

1. В магазин привезли новую серию "Киндер-сюрпризов" – шоколадных яиц, в каждом из которых находится одна игрушечная машинка. Продавец сказал Пете, что в новой серии всего пять различных видов машинок, и по внешнему виду невозможно определить, какая машинка внутри. Какое минимальное количество "Киндер-сюрпризов" должен купить Петя, чтобы гарантированно иметь три машинки одного, неважно какого, вида?
Решение. Если Петя купит 10 "Киндер-сюрпризов", то при неблагоприятной для него ситуации он получит по две машинки каждого вида. Если он купит 11 "Киндер-сюрпризов", то получит три машинки какого-то одного вида. Докажем это. Пусть Петя купил 11 "Киндер-сюрпризов", но не получил три машинки одного вида. Это означает, что число машинок не больше, чем 10 (по две машинки одного вида, всего пять видов). Противоречие.
Ответ. Петя должен купить не менее 11 "Киндер-сюрпризов".

2. Докажите неравенство для любых вещественных a, b, c
$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4bc + 4ac$$
При каких a, b, c выполняется равенство?
Решение. Преобразуем неравенство, выполнив равносильные преобразования.
$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 - 4ab - 4bc - 4ac \geq 0$$
$$4a^2 - 4ab + b^2 + 4b^2 - 4bc + c^2 + 4c^2 - 4ac + a^2 \geq 0$$
$$(2a - b)^2 + (2b - c)^2 + (2c - a)^2 \geq 0$$
Это неравенство равносильно исходному. Оно верно, так как получено сложением трех верных неравенств.
Неравенство обращается в равенство при выполнении
$$\begin{cases} 2a = b, \\ 2b = c, \\ 2c = a. \end{cases}$$
Последовательно подставляем переменные в уравнения сверху вниз: $b = 2a, c = 4a, 8a = a$. Значит, $a = 0$, решение системы $a = b = c = 0$.
Ответ. Неравенство доказано, оно обращается в равенство при $a = b = c = 0$.

3. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности. Вершины A, B, C, D являются центрами окружностей S_1, S_2, S_3, S_4 соответственно. Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке X, аналогично S_2 и S_3 касаются в точке Y, S_3 и S_4 – в точке Z, S_4 и S_1 – в точке V. Докажите, что существует окружность, описанная вокруг четырехугольника $XYZV$.

   Решение. Условие, что две окружности с центрами A и B касаются друг друга в точке X, приводит к тому, что точка X лежит на отрезке AB, соединяющем центры,



и $AX + XB = AB$. Аналогично, $BY + YC = BC$, $CZ + ZD = CD$, $AV + VD = AD$. Треугольники AXV, BXY, CYZ, DZV – равнобедренные. Биссектрисы углов четырехугольника $ABCD$ являются биссектрисами углов этих равнобедренных треугольников, и, следовательно, медианами и высотами. Поэтому биссектрисы углов четырехугольника $ABCD$ являются серединными перпендикулярами к сторонам четырехугольника $XYZV$. Существует вписанная окружность четырехугольника $ABCD$, поэтому все четыре биссектрисы его углов пересекаются в одной точке O. Поэтому все четыре серединных перпендикуляра к сторонам четырехугольника $XYZV$ пересекаются в одной точке, и он является вписанным в некоторую окружность.
Окончание решения может быть проведено иначе. Если доказать, что треугольники AXV, BXY, CYZ, DZV равнобедренные, можно отметить на рисунке их попарно равные углы и затем доказать, что суммы противоположных углов четырехугольника $XYZV$ составляют $180°$.

4. Пусть S – сумма цифр некоторого пятизначного числа, все цифры которого разные и ненулевые. Выписали все пятизначные числа, полученные перестановкой цифр исходного числа, а затем все выписанные числа, включая и исходное число, сложили. Докажите, что полученная сумма делится на S.
Решение. Пусть данное число имеет вид $a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$. Систематизируем все выписанные числа. Первый раз сделаем так. Сгруппируем все написанные числа в пять групп, в каждой группе первая цифра совпадает. В этих группах по очереди на первом месте стоит каждая из пяти цифр. Внутри одной такой группы соберем вместе все числа, у которых совпадает вторая цифра. Далее, внутри оразовавшихся групп еще раз группируем числа, у которых совпадает третья цифра. Наконец, остается систематизировать два числа по четвертой цифре (пятая цифра определяется однозначно). Мы показали, что все числа собираются в группы равной численности (по $4! = 24$ числа), по сопадающей первой цифре. Но такую же систематизацию можно провести, начав со второй цифры, затем с третьей, и так далее до пятой. Это означает, что для того, чтобы сложить все числа, можно по отдельности сложить все разряды, и в каждом разряде будет одинаковое количество слагаемых, содержащих определенную цифру. Итак, сумма всех чисел представляется в виде суммы по разрядам следующим образом

$$\begin{aligned}
&(a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \cdot 4! \cdot 10^4 +\\
&(a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \cdot 4! \cdot 10^3 +\\
&(a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \cdot 4! \cdot 10^2 +\\
&(a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \cdot 4! \cdot 10 +\\
&(a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \cdot 4!
\end{aligned}$$

Мы видим, что эта сумма делится на $S = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$.

5. Таблица 3×3 первоначально заполнена ноликами. За один ход в таблице выбирается любой квадрат 2×2, и в нем все нолики заменяются на крестики, а все крестики - на нолики. Назовем "рисунком" любое расположение крестиков и ноликов в таблице. Сколько различных рисунков можно получить в результате выполнения таких ходов? Рисунки, получающиеся один из другого в результате поворота на $90°$ или $180°$ градусов, считаем разными.

Решение. Первый способ. Различные рисунки отличаются плюсом или минусом хотя бы в одной клетке таблицы. Символ, стоящий в данной определенной клетке, задается четностью или нечетностью количества выполненных замен в каждом квадрате 2×2, содержащем эту клетку. Каждый квадрат 2×2 содержит ровно одну угловую клетку таблицы, и укаждого такого квадрата угловая клетка своя. Четность или нечетность замен в каждом квадрате соответствует символу, стоящему в его единственной угловой клетке (если в угловой клетке стоит крестик, число замен было нечетным, если стоит нолик – число замен было четным). Поэтому каждая комбинация символов в таблице однозначно соответствует комбинации ноликов и крестиков в угловых клетках таблицы. Так как число различных комбинаций в четырех клетках равно $2^4 = 16$, то всего существует 16 рисунков.

Второй способ. Можно составить таблицу переходов и показать, что при многократном выполнении замен возникают циклы, и одни рисунки переходят в другие. Ниже показаны все имеющиеся возможности расставить крестики и нолики, и количества соответствующих рисунков в одной группе. Рисунки одной группы отличаются друг от друга поворотами на $90°$ или $180°$ градусов. Наличие циклов доказывает, что количество рисунков ограничено, и их меньше, чем 2^9.

0	+	+
+	0	+
+	+	0

2 рисунка

+	0	+
0	0	0
+	0	+

1 рисунок

0	0	0
0	0	0
0	0	0

1 рисунок

+	0	+
0	+	+
+	+	0

4 рисунка

0	+	+
0	+	+
0	0	0

4 рисунка

+	0	+
+	0	+
0	0	0

4 рисунка

Ответ. 16 рисунков.