## 9 класс

**9.1.** Дано выражение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, где $x$ и $y$ – натуральные числа. Если число $x$ увеличить на 2, а число $y$ уменьшить на 2, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy+1$ – квадрат целого числа.

**Решение.** По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y-2}$, откуда $\frac{x+y}{xy}=\frac{x+y}{(x+2)(y-2)}$. Так как $x+y$ положительно, то $xy=(x+2)(y-2)$. Откуда $y=x+2$. Тогда $xy+1=x(x+2)+1=(x+1)^2$.

**Комментарий.** Доказано, что $y=x+2$ – 2 балла.

**9.2.** На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 4 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 3 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

**Ответ.** 4.

**Решение.** Заметим, что на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек, не может быть 5 синих точек. Действительно, в этом случае между крайними синими точками будет 3 синих, а, значит, еще хотя бы 2 красные. Поэтому на таком отрезке не более 4 синих точек.

Покажем, что 4 синие точки могут лежать на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек. Пусть точки расположены на прямой в следующем порядке: 2 красных – 4 синих – 2 красных – 4 синих – 2 красных. Тогда все условия выполняются, и есть отрезок с 4 синими точками.

**Комментарий.** Доказано, что синих точек между соседними красными не больше 4 – 4 балла.

Приведен верный пример с 4 синими точками – 3 балла.

**9.3.** Числа $x$ и $y$ удовлетворяют неравенствам $x^3>y^2$ и $y^3>x^2$. Докажите, что $y>1$.

**Решение.** Правые части неравенств неотрицательны, поэтому оба числа $x$ и $y$ положительны. Перемножив данные неравенства и сократив на положительное число $(xy)^2$, получим: $xy>1$. Это означает, что по крайней мере одно из (положительных!) чисел $x$ и $y$ больше 1. Если $y>1$, то утверждение доказано. Пусть $x>1$. Тогда из неравенства $y^3>x^2$ следует, что $y^3>1$, то есть $y>1$.

**Комментарий.** Доказано, что $xy>1$ – 2 балла.

Доказано, что одно из чисел $x$ и $y$ больше 1 – еще 1 балл.

Рассмотрены не все случаи – не более 4 баллов.

**9.4.** В замке 9 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат $3\times3$. В эти комнаты по одному человеку поселилось 9 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 9 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 9 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**Ответ.** 6 рыцарей.

**Решение.** Заметим, что у каждого рыцаря хотя бы один из соседей должен быть лжецом. Покажем, что лжецов должно быть не менее 3 (так мы покажем, что рыцарей не больше 6). Пусть лжецов не больше 2, тогда найдется «вертикальный ряд» комнат, в которых живут только рыцари. Но тогда у каждого из этих рыцарей должен быть сосед лжец (и эти соседи разные). Поэтому лжецов не меньше 3.

На рисунке показано, как могли поселиться 6 рыцарей и 3 лжеца.

| | | |
|---|---|---|
| Р | Л | Р |
| Р | Р | Л |
| Л | Р | Р |

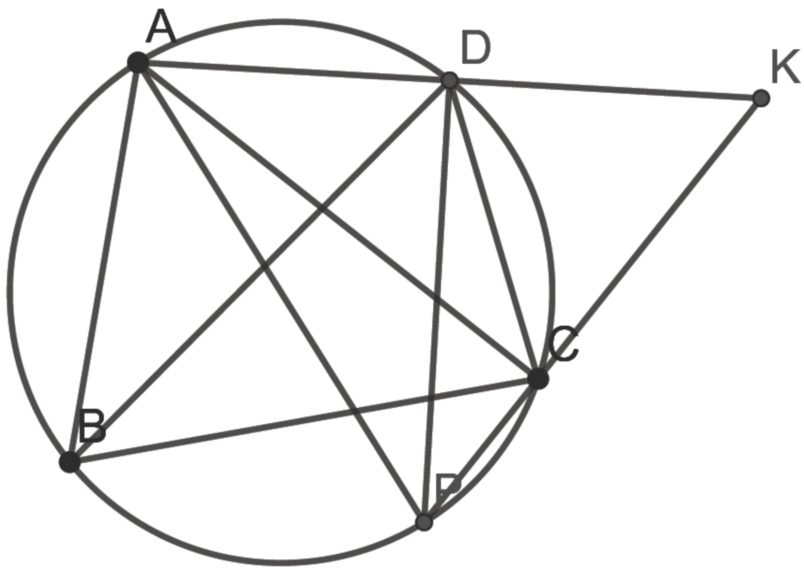
**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Пример расселения 3 лжецов и 6 рыцарей – 2 балла.
Доказано, что рыцарей не более 6 – 5 баллов.

**Замечание 1.** В примере лжецы не должны быть соседями.
**Замечание 2.** Есть и другие примеры.

**9.5.** На данной окружности ω выбрана фиксированная точка $A$. Выберем на окружности две произвольные точки $B$ и $C$, и найдем точку $D$ пересечения биссектрисы угла $ABC$ с окружностью ω. Пусть $K$ – такая точка, что точка $D$ – середина отрезка $AK$. Прямая $KC$ вторично пересекает окружность в точке $P$ ($P \neq C$). Докажите, что точка $P$ не зависит от выбора точек $B$ и $C$.

**Первое решение.** Покажем, что точка $P$ диаметрально противоположна точке $A$. Это и будет означать, что $P$ не зависит от выбора точек $B$ и $C$. Таким образом, нам нужно доказать, что $PD$ – перпендикуляр к $AK$. Будем считать, что точка $C$ лежит на отрезке $KP$. Другой случай разбирается аналогично. $AD = DK$, значит, нам нужно доказать, что $\alpha = \angle APD = \beta = \angle KPD$. Но $\alpha = \angle APD = \angle ABD$ (вписанные, опираются на дугу $AD$), $\beta = \angle CPD = \angle CBD$ (вписанные, опираются на дугу $CD$). Наконец, $\angle ABD = \angle CBD$, так как $BD$ – биссектриса $\angle ABC$. Утверждение доказано.

**Второе решение.** Как и в первом решении, покажем, что точка $P$ диаметрально противоположна точке $A$. Так как $BD$ – биссектриса угла $ABC$, то дуги $AD$ и $DC$ равны, значит, $AD = DC$. Из того, что точка $D$ – середина отрезка $AK$, следует $AD = DK$. Значит, $AD = DC = DK$. То есть в треугольнике $ACK$ медиана $CD$ равна половине стороны $AK$, к которой она проведена. Значит, треугольник $ACK$ – прямоугольный, и $\angle ACK = 90°$. Поэтому $\angle ACP = 90°$, и $AP$ – диаметр окружности ω.




**Комментарий.** Указано условие, равносильное утверждению задачи (точка $P$ диаметрально противоположна точке $A$) – 2 балла.

Разобран только один случай расположения точки $C$ – баллы не снимаются.