9 класс

9.1. Существуют ли такие три положительных числа *a*, *b*, *c*, что каждый из трех квадратных трехчленов ax^2+bx+c, bx^2+cx+a, cx^2+ax+b имеет хотя бы один корень?

Ответ: не существуют. **Решение**. Предположим, от противного, что такие *a*, *b*, *c* существуют. Тогда, рассматривая дискриминанты трехчленов, получим $b^2 \ge 4ac$, $c^2 \ge 4ab$, $a^2 \ge 4bc$. Перемножив эти три неравенства (с положительными частями) и сократив на $a^2b^2c^2$, будем иметь $1 \ge 64$. Противоречие доказывает наше утверждение. *Другой способ решения* – следующий. Пусть, для определённости, $a \le b \le c$, тогда для квадратного трехчлена cx^2+ax+b получим противоречивое двойное неравенство $a^2 \ge 4bc \ge 4a^2$.

9.2. Числа *a, b, c* удовлетворяют соотношению $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Найдите $(a+b)(b+c)(a+c)$.

Ответ. 0. **Решение**. См. задачу 8.3.

9.3. Из натуральных чисел 1, 2, …, 101 выбирают группу чисел так, чтобы наибольший общий делитель любых двух чисел из группы был больше двух. Каким может быть наибольшее количество чисел в такой группе?

Ответ. 33. **Решение**. *Оценка.* Разобьем числа 1,2,…,101 на 34 множества: $A_0=\{1,2\}$, $A_1=\{3,4,5\}$, $A_2=\{6,7,8\},\ldots,A_{33}=\{99,100,101\}$ (т.е. A_k при $k \ge 1$ состоит из трех чисел $3k, 3k+1, 3k+2$). В искомой группе чисел не может быть числа из A_0 (иначе НОД двух чисел из группы, одно из которых принадлежит A_0, был бы ≤ 2), а из каждого A_k при $k \ge 1$ в группу может попасть не более одного числа, т.к. в противном случае, если в группу попадут соседние числа, то их НОД $=1$, а если попадут числа $3k$ и $3k+2$, то их НОД ≤ 2 (поскольку их разность равна 2). Значит, всего чисел в искомой группе не большее 33 (не более, чем по одному из каждого A_k для $k \ge 1$). *Пример.* Рассмотрим группу чисел $\{3,6,9,\ldots,99\}$: в этой группе 33 числа и все они делятся на 3.

9.4. В трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* диагонали пересекаются в точке *M*. Оказалось, что *AB=DM* и $\angle ABD=\angle CBD$. Докажите, что **а**) $\angle BAD > 60^\circ$; **б**) *AB>BC*.

Решение. См. задачу 8.4.

9.5. На плоскости расположено 99 отрезков и отмечены все точки их пересечения. Могло ли оказаться так, что **а)** на любом отрезке ровно три отмеченных точки? **б)** каждый отрезок пересекается ровно с тремя другими отрезками?

Ответ: а) могло**; б)** не могло. **Решение**. **а)** Пример расположения можно привести, например, такой: сделаем 19 копий пяти отрезков правой части в рисунке задачи 7.5 и добавим четыре отрезка правой части в рисунке задачи 8.5. **б)** Предположим, от противного, что такое расположение существует. Рассмотрим граф (схему) пересечений данных 99 отрезков: вершины графа соответствуют отрезкам, а ребра (связи) между вершинами проводятся, когда соответствующие отрезки пересекаются. По условию задачи, каждая из 99 вершин графа соединена ребрами ровно с тремя другими. Каждое ребро графа соединяет две вершины, поэтому общее количество ребер равно $\frac{99 \cdot 3}{2}$ (т. к. при подсчете в виде $99 \cdot 3$ каждое ребро учтено дважды). Получили нецелое число ребер, и значит, такого расположения не существует.